«Теориялық және қолданбалы мезаника» пәнінен студенттердің практикалық есептер мен өзіндік жұмыс тапсырмаларын орындау жөніндегі кейбір жалпы әдістемелік нұсқаулар

СТАТИКА

Қатты денеге әсер ететін күштердің әр түрлі жүйелерінің тепе-теңдіктері берілген есептер негізгі екі топқа бөлуге болады:

1) Денеге әсер ететін күштер толық немесе жартылай берілген есептер. Бұл есептерде дене тепе-теңдік жағдайында болуы үшін күштер қандай шарттарды қанағаттандыруы керек екендігі анықталады, табылған шарттар зерттеледі;

2) Дене тепе-теңдікте екені алдын ала белгілі болып келген есептер. Бұл есептерде денеге әсер ететін күштердің ішінен белгісіз күштерді анықтау мәселесі қойылады. Байланыстар реакциялары белгісіз күштер болып келеді.

Статика есептерін шешу мәселесін бастау кезінде мынадай жоспар қолдану керек.

1) Ең алдымен белгісіздерді табу үшін қай дененің (немесе қай нүктенің) тепе-теңдігін қарастыру керек екендігін анықтап алу керек.

2) Тепе-теңдігі қарастырылуы тиісті дене (нүкте) байланыстардан босатылуы керек. Байланыстар өздерінің денеге түсіретін реакцияларымен ауыстырылады.

3) Бұл денеге (нүктеге) әсер ететін барлық берілген (актив) күштер және байланыстар реакциялары векторлар түрінде суретте көрсетіледі.

4) Суретте көрсетілген күштер жиынтығының күштердің қандай жүйесін беретінін анықтау керек.

5) Осы күштер жүйесіне сәйкес келетін тепе-теңдік теңдеулері құрылады.

6) Тепе-теңдік теңдеулерінен белгісіздерді анықтап, есеп жауабына талдау жүргізу керек.

Есептерді шешу геометриялық немесе аналитикалық әдістерінің бірі арқылы орындалады. Денеге әсер ететін күштер саны үшке тең болған жағдайда геометриялық әдісті қолдану тиімді болады. Аналитикалық әдіс денеге әсер ететін күштердің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерді құруға негізделеді.

1 тақырып. ЖИНАҚТАЛАТЫН КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ
(№1 сабақ)

1.1. Бір түзу бойымен әсер ететін күштер тепе-теңдігі.

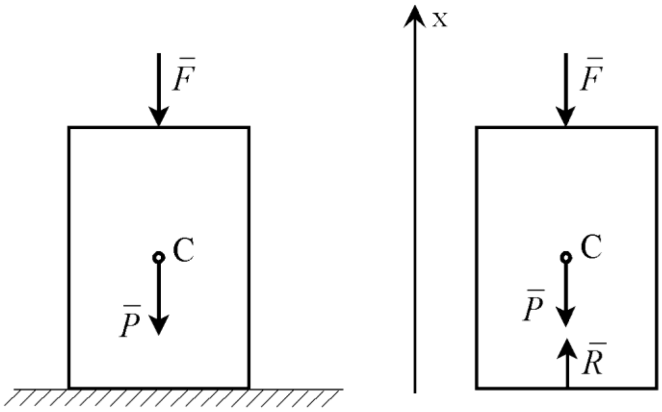
Мақсат: Байланыстар және олардың реакциялары деген ұғымдарды игеру; денені байланыстардан босата отырып, реакциялардың бағытын дұрыс көрсету; бір түзу бойымен әсер ететін күштер тепе-теңдігінің шарттарын дұрыс жаза білу.

Бақылау сұрақтары:

1. Байланыс дегеніміз не?
2. Байланыс ретінде қолданылатын тіректердің негізгі түрлерін атаңыз?
3. Күштің өске проекциясы қалай анықталады?
4. Статиканың негізгі аксиомалары?

Есеп шығару мысалы: Салмағы $P = 200H$ біртекті цилиндр горизонталь жазықтықтың бетінде жатыр. Әсер етуші сызығы ауырлық центрі арқылы өтетін $F = 500H$ вертикаль күш цилиндрді үстінен қысады.

Цилиндрдің горизонталь жазықтықты қысатын күшін табу керек.



1-сурет.

Шешуі. 1. Цилиндрге бір түзудің бойында түсірілген $\overline{P}$ салмақ күшін және $\overline{F}$ қысым күшін көрсетеміз.

2. Денені ойша байланыстардан босатамыз, олардың әсерін реакция күштерімен ауыстырамыз. Цилиндрге жылтыр көлденең жазықтық түріндегі бір байланыс жасалған. Оның реакция күші $\overline{R}$ жазықтыққа перпендикуляр жоғары бағытталады.

3. Енді берілген еркін емес денені бір түзу бойымен бағытталған үш күш түсірілген еркін дене деп қарастыруға болады. Осы күштердің тепе-теңдік шартын жазамыз:

$$\overline{F} + \overline{P} + \overline{R} = 0.$$

4. Күштерді параллель өске проекциялап алатынымыз:

$$R - F - P = 0 \text{ немесе } R = F + P = 500 + 200 = 700H.$$

Цилиндрдің горизонталь жазықтықты қысатын күші модулі бойынша $\overline{R}$ реакция күшіне тең және оған қарама-қарсы, яғни төмен бағытталады.

Ескертулер.

1. Тепе-теңдік шарттары бір денеге әсер ететін күштер жүйесіне қатысты құрылады. Сондықтан ол теңдеулерден дененің байланыстарға түсіретін қысымы емес, байланыстардың реакциялары анықталады. Ал дененің байланыстарға қысымы, әсер және қарсы әсер аксиомасына сүйенсек, модулдері бойынша сәйкес байланыстардың реакцияларына тең және оларға қарама-қарсы бағытталады.

2. Инерция принципіне сәйкес қатты дененің тепе-теңдік күйі деп оның тек тыныштық күйін ғана емес, сонымен қатар оның инерция бойынша қозғалысын да, яғни бірқалыпты және түзу сызықты қозғалысын да түсіну керек.

1.2 Жинақталатын жазық күштер жүйесі.

Мақсат: Тұйықталған күштер үшбұрышын салу және аналитикалық әдіс арқылы есепті шығарып үйрену.

Бақылау сұрақтары:

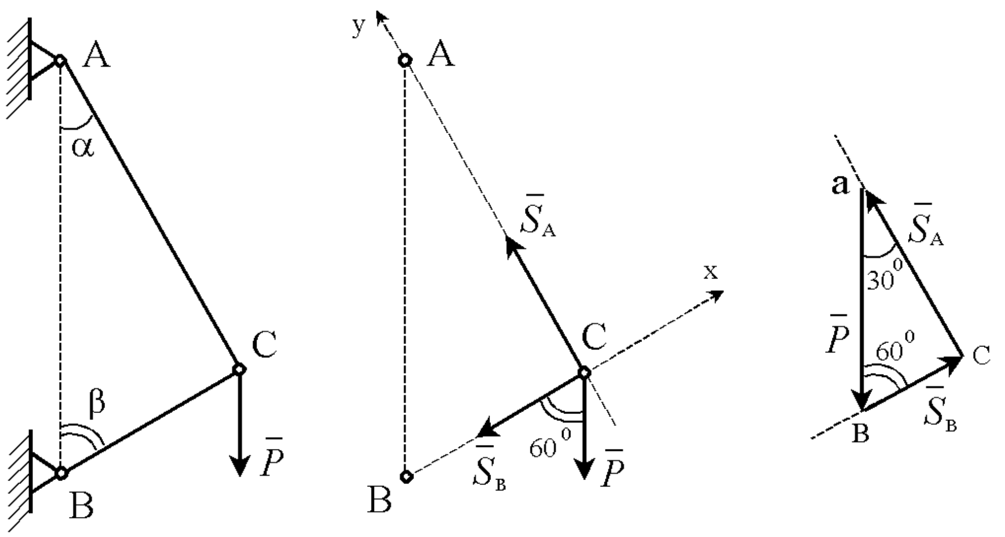
1. Жазықтықтағы жинақталатын күштер жүйесі деп қандай күштерді айтамыз?
2. Жинақталатын күштер жүйесінің күштер көпбұрышы қалай салынады?
3. Жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдігінің геометриялық шарттары қалай айтылады?
4. Жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдігінің аналитикалық теңдеулері?

Тұйықталған күштер үшбұрышын салуға **мысал**:

Мысал. Салмағы $P-$ға тең жүк, суретте көрсетілгендей *C* нүктесіне ілінген. *A, B* және *C* нүктелерінде сырықтар топсалармен бекітілген. *AC* және *BC* сырықтарының реакцияларын табу керек (2-сурет).

Берілгені: $P = 1000H, \alpha = 30^0, \beta = 60^0.$

Анықтау керек: $\overline{S}_A, \overline{S}_B.$



а) б) в)

2-сурет.

Шешуі:

1. Нүкте деп аталатын, *C* денесінің тепе-теңдігін қарастырамыз.

2. *C* нүктесіне түсірілген актив күш $\overline{P}$.

3. *C* нүктесін байланыстардан босатамыз. *AC, BC* сырықтары $C-$дағы байланыстар. Бұлардың реакцияларын $\overline{S}_A, \overline{S}_B$. деп белгілейміз. $\overline{P}$ күшінің әсерінен *AC* сырығы созылады, сондықтан оның реакциясы *AC* бойымен *C*-дан *A* нүктесіне қарай бағытталады. *BC* сырығы $\overline{P}$ күшінің әсерінен сығылады, сондықтан оның реакцисы *BC* бойымен *B*-дан *C* нүктесіне қарай бағытталады (2б-сурет). Сөйтіп, *C* нүктесі $\overline{P}, \overline{S}_A, \overline{S}_B$ күштерінің әсерінен тепе-теңдікте тұрған нүкте болып табылады.

4. Есепті геометриялық әдіспен шешеміз.

Күштер үшбұрышын құрамыз. Үшбұрышты құру белгілі $\overline{P}$ күшінен басталады. Кез келген бір D нүктесінен бастап берілген масштабта алынған, $\overline{P}$ күшіне тең, яғни параллель *ав* кесіндісін саламыз (2в-сурет). Кесіндінің бір ұшы *а* арқылы екі реакцияның бірінің (мысалы $\overline{S}_A$ реакциясының) бағытына параллель түзу жүргізіп, оның екінші ұшы *в* арқылы қалған реакция (бізде $\overline{S}_B$) бағытына параллель *вс* түзуін жүргіземіз. Сонда осы екі түзудің қиылысқан нүктесі, күштердің *авс* үшбұрышының үшінші төбесі *с*-ны береді. Үшбұрыш қабырғаларын күштер контур бойынша бір жаққа қарай бағытталатындай етіп бағыттаймыз.

Демек, $\overline{S}_A, \overline{S}_B$ күштерінің модулдерін анықтау үшін *авс* үшбұрышынан оның белгісіз қабырғаларын табу керек.

Күштер үшбұрышының *ав* қабырғасы белгілі. Оның бұрыштарын анықтағаннан кейін, синустар теоремасына сүйене отырып, мына қатынастарды жазамыз:

$$\frac{S_B}{\sin 30^0} = \frac{S_A}{\sin 60^0} = \frac{P}{\sin 90^0}.$$

Осыдан:

$$S_A = \frac{\sin 60^0}{\sin 90^0} P = 866H, \;\; S_B = \frac{\sin 30^0}{\sin 90^0} P = 500H.$$

Алдыңғы мысалды проекциялау әдісін қолданып шығарайық:

Мысал. Салмағы $P -$ға тең жүк, 2 суретте көрсетілгендей *C* нүктесіне ілінген. A, B және C нүктелерінде сырықтар топсалармен бекітілген. AC және BC сырықтарының реакцияларын табу керек (2-сурет).

Берілгені: $P = 1000H, \alpha = 30^0, \beta = 60^0.$

Анықтау керек: $\overline{S}_A, \overline{S}_B.$

Шешуі: 1. Нүкте деп аталатын, *C* денесінің тепе-теңдігін қарастырамыз.

2. *C* нүктесіне түсірілген актив күш $\overline{P}$.

3. *C* нүктесін байланыстардан босатамыз. *AC, BC* сырықтары $C -$дағы байланыстар. Бұлардың реакцияларын $\overline{S}_A, \overline{S}_B.$ деп белгілейміз. $\overline{P}$ күшінің әсерінен *AC* сырығы созылады, сондықтан оның реакциясы *AC* бойымен *C*-дан A нүктесіне қарай бағытталады. *BC* сырығы $\overline{P}$ күшінің әсерінен сығылады, сондықтан оның реакцисы *BC* бойымен *B*-дан *C* нүктесіне қарай бағытталады (2б-сурет). Сөйтіп, C нүктесі $\overline{P}, \overline{S}_A, \overline{S}_B$ күштерінің әсерінен тепе-теңдікте тұрған нүкте болып табылады.

4. Есепті проекция әдісімен, яғни аналитикалық әдіспен шешеміз. Координаттар жүйесінің бас нүктесін *C* топсасына орналастырамыз. X өсін *BC* бойымен оң жаққа , ал Y өсін *AC* бойымен жоғары бағыттаймыз.

C нүктесіне түсірілген күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерді жазамыз:

$$\sum F_{кx} = 0; \quad -S_B - P \cdot \cos 60^0 = 0,$$

$$\sum F_{ку} = 0; \quad S_A - P \cdot \cos 30^0 = 0.$$

Бұл құрылған екі теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз:

$$S_A = P \cdot \cos 30^0 = 866 \text{ Н},$$

$$S_B = -P \cdot \cos 60^0 = -500\ \text{Н}.$$

$(-)$ таңбасы $\overline{S}_B$ күшінің бағыты, 2б-суретте көрсетілген бағытына қарама-қарсы бағытталатынын көрсетеді, яғни *BC* сырығы сығылады.

Ескертулер.

1. Егер есептің шартында құрылым бөліктерінің сызықты өлшемдері берілсе, онда геометриялық әдіспен шығару барысында ұқсастықтарды пайдалану ыңғайлы болады; ал егер бұрыштар берілсе, онда тригонометриялық формулаларды қолданған дұрысырақ.

2. Егер қандай да бір байланыс реакциясының суретте кескінделген бағыты оның шын мәнісіндегі бағытына сәйкес келмесе, онда бұл қателік геометриялық жолмен шығару барысында күштер көпбұрышынан анықталады, ал аналитикалық әдіспен шығарған жағдайда ондай реакцияның шамасы теріс болып шығады.

1.3 Кеңістіктегі жинақталатын күштер жүйесі.

Мақсат: Кеңістікте берілген жинақталатын күштер жүйесінің тепе-теңдігіне берілген есептерді шығарып үйрену.

Бақылау сұрақтары:

1. Кеңістіктегі жинақталатын күштер жүйесі қалай анықталады?
2. Кеңістіктік жинақталатын күштер жүйесі тепе-теңдігінің аналитикалық шарттары?

Мысал. Салмағы $P-$ға тең жүк, суретте көрсетілгендей, *A* нүктесіне ілінген. *C, B* нүктелерінде сырықтар *AB* және *AC* топсаларымен, ал D нүктесіне сым арқанмен бекітілген. Сырықтардың реакцияларын және сым арқанның керілу күшін табу керек (3-сурет).

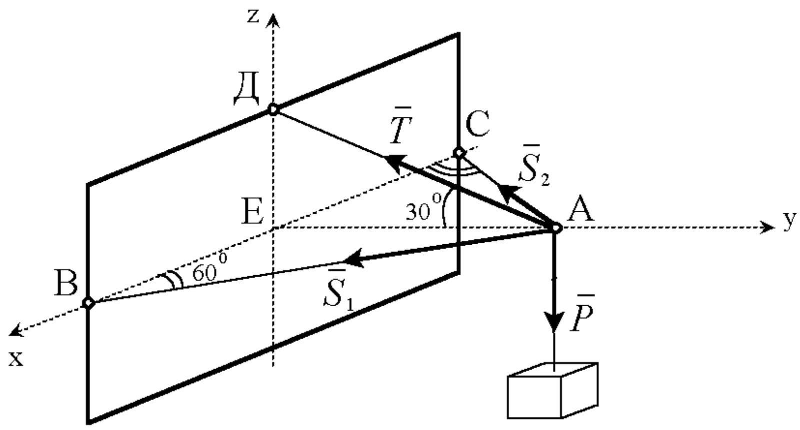
Берілгені: $P = 3000H, \angle CBF = \angle BCA = 60^0, \angle EAD = 30^0.$

Анықтау керек: $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{T}.$

Шешуі. 1. Нүкте деп алуға болатын, *A* денесінің (түйінінің) тепе-теңдігін қарастырамыз.

2. *A* нүктесіне түсірілген актив күш $\overline{P}$.

3. *A* нүктесін байланыстардан босатамыз. *AB, AC* сырықтары және AD сым арқаны *A*-дағы байланыстар. Бұлардың реакцияларын $\overline{S}_1, \overline{S}_2, \overline{T}$ деп белгілейміз және оларды сырықтар мен сым арқанды созылып тұр деген болжаммен *A* түйінінен сыртқа бағыттаймыз. Егер бір нүктеге жинақталатын күштер жүйесі кеңістікте орналасқан күштер жүйесі болса, онда есеп шығарудың аналитикалық тәсілін пайдалану тиімді. *A* нүктесіне түсірілген күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін теңдеулерді жазамыз:



3-сурет

$$\sum F_{\kappa x} = 0; \quad S_1 \cdot \cos 60^0 - S_2 \cdot \cos 60^0 = 0,$$

$$\sum F_{\kappa y} = 0; \quad -S_1 \cdot \cos 30^0 - S_2 \cdot \cos 30^0 - T \cdot \cos 30^0 = 0,$$

$$\sum F_{\kappa z} = 0; \quad T \cdot \sin 30^0 - P = 0.$$

Бұл құрылған үш теңдеулер жүйесін шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз: $T = 6000H$, $S_1 = S_2 = -3000H$. S_1 және S_2 күштері теріс таңбалы болып шықты. Сондықтан, олар суретте біз көрсеткен бағытқа қарама-қарсы бағытталуы тиіс, яғни сырықтар AB және AC сығылады.

Ескертулер.

1. Егер күштердің өстермен, мысалы, x және y өстерімен, жасайтын бұрыштары берілмесе, онда екі қайтара проекциялауды қолданамыз. Яғни, күшті алдымен xOy жазықтығына проекциялап, сосын сол табылған проекцияны сәйкесінше өстерге проекцилаймыз.

2. Кеңістіктік ферманың сырықтарының бойындағы күштерді анықтау үшін түйіндерді қиып алу тәсілін қолданамыз. Ферманың түйіндері қарастырылатын түйіндегі белгісіз күштердің саны үштен аспайтындай ретпен қиылып отырады.

2 тақырып: КҮШТІҢ ЦЕНТРГЕ ҚАТЫСТЫ МОМЕНТІ

(№2 сабақ)

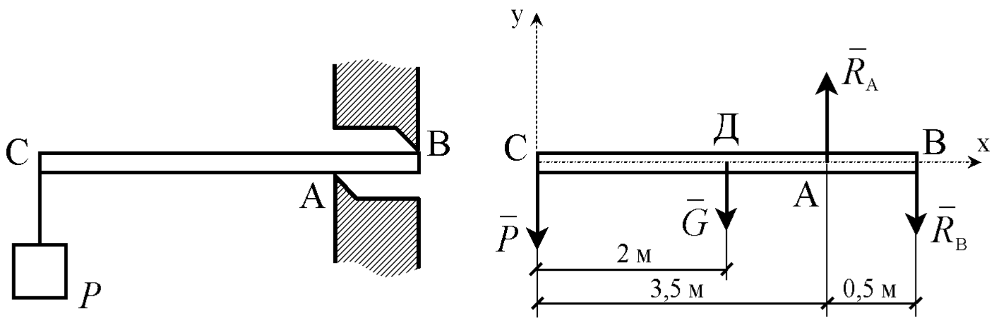
Мақсат: Күштің центрге қатысты моментінің модулі мен таңбасын дұрыс анықтай білу және оларды параллель күштердің жазық жүйесінің әсеріндегі дененің тепе-теңдігіне берілген есептерді шығаруда қолдану.

Бақылау сұрақтары:

1. Күштің центрге қатысты моменті қалай анықталады?
2. Күштің центрге қатысты моментінің таңбасы қалай анықталады?
3. Қандай жағдайларда күштің центрге қатысты моменті нөлге тең?
4. Қос күш дегеніміз не?
5. Қос күштің моменті қалай анықталады?
6. Қос күштің құраушы күштерінің моменттерінің қосындысы туралы теорема?
7. Жазықтықтағы параллель күштер тепе-теңдігінің теңдеулер жүйесі?
8. Қазықша байланыстың реакциялары?
9. Бірқалыпты және сызықты үлестірілген жүктемені бір күшпен қалай ауыстыруға болады?

Мысал. Ұзындығы *4м* және салмағы *0,5Н* біртекті арқалық қалыңдығы *0.5м* қабырғаға *A* және *B* нүктелерінде сүйенетіндей болып енгізіліп қойылған. Біліктің соңына салмағы *4Н* жүк $\overline{P}$ ілінген.

A және *B* нүктелеріндегі реакцияларын табу керек (4-сурет).



4-сурет

Шешуі. 1. *CB* арқалығының тепе-теңдігін қарастырамыз.

2. *CB*-ға әсер етуші актив күштерді векторлар арқылы суретте көрсетеміз. Актив күштер болып табылатындар: $\overline{P}, \overline{G}$.

3. *CB* арқалығын байланыстардан босатамыз. *A* және *B* тіректерінің $\overline{R}_A$ және $\overline{R}_B$ реакциялары арқалыққа перпендикуляр бағытталады.

Тепе теңдік теңдеулерін құрамыз:

$$\sum F_{ky} = 0; \quad -P - G + R_A - R_B = 0,$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0; P\cdot 3.5+G\cdot 1.5-R_B\cdot 0.5=0.$$

4. Бұл құрылған екі теңдеулерді шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз:

$$R_B=7\cdot P+3\cdot G=29.5\,\text{Н},\ R_\text{А}=R_\text{В}+P+G=34\,\text{Н}.$$

Ескертулер.

1. Декарттық координаталар өстерінің біреуін қатты денеге түсірілген барлық күштерге параллель бағыттаймыз.

2. Моменттер теңдеуін белгісіз күштердің бірі түсірілген нүктеге қатысты құрамыз. Сонда ол күштің өзі түскен нүктеге қатысты моменті нөлге тең болғандықтан, теңдеудің құрамында тек бір ғана белгісіз шама болады.

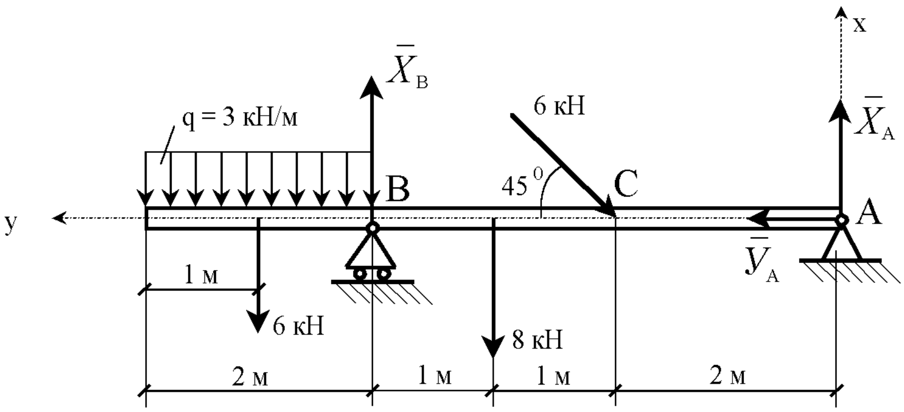
2 тақырып: КЕЗ КЕЛГЕН ЖАЗЫҚ К8ШТЕР ЖҮЙЕСІ

Мақсат: Жазықтықтағы кез келген күштер жүйесі туралы ұғымды түсіну, осындай күштер жүйесінің әсеріндегі қатты дене тепе-теңдігінің теңдеулерін құруды үйрену.

Тақырыптық сұрақтар:

1. Жазықтықтағы кез келген күштер жүйесі тепе-теңдігінің теңдеулер жүйесін айтыңыз.
2. Жазықтықтағы кез келген күштер жүйесінің теңәсерлісінің моменті туралы Вариньон теоремасы.
3. Статикалық анықталатын және статикалық анықталмайтын есептер дегенді қалай түсінесіз?

1 мысал. Екі шоғырланған күштері және бірқалыпты үлестірілген күштердің әсеріндегі арқалықтың *A* және *B* тіректері реакцияларын табу керек. Бірқалыпты үлестірілген күштердің қарқындылығы, шоғырланған күштердің шамалары және өлшем бірліктері 5 -суретте көрсетілген.



5-сурет

Шешуі. 1. *AB* арқалығының тепе-теңдігін қарастырамыз. Арқалыққа түсірілген актив күштер: 6 кН, 8 кН.

2. Бірқалыпты үлестірілген күштердің қарқындылығы q-ді ұзындыққа көбейтіп, оларды бір күшпен ауыстырамыз: $q \cdot l = 3 \cdot 2 = 6kH$.

3. Арқалықты *A* - қозғалмайтын топсалы тірек және *B* - жылжымалы топсалы тірек түріндегі байланыстардан босатамыз. *A* топсасының реакциясының бағыты белгісіз, сондықтан оны координаттық өстер бойымен бағытталған екі өзара перпендикуляр $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ құраушыларымен ауыстырамыз. Ал *B* топсасының $\bar{X}_B$ реакциясы тіреу жазықтығына перпендикуляр бағытталады.

4. Алынған жазық күштер жүйесі үшін үш тепе-теңдік теңдеулерін жазамыз:

$$\sum m_C(\overline{F}_k) = 0; 6 \cdot 4 - X_B \cdot 2 + 8 \cdot 1 + X_A \cdot 2 = 0,$$

$$\sum F_{kx} = 0; X_A - 8 + X_B - 6 - 6\sin 45^0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; -6\cos 45^0 + Y_A = 0.$$

5. Бұл құрылған үш теңдеулерді шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз:

$$X_A = 2.6\ кН,\ Y_A = 4.2\ кН,\ X_B = 15.6\ кН.$$

Ескертулер.

1. Моменттер теңдеуін белгісіз екі күштің әсер ету сызықтары қиылысқан нүктеге қатысты құрған ұтымды болады. Бұл осы моменттер теңдеуінен үшінші белгісіз күшті тікелей анықтауға мүмкіндік береді.

2. Кейде екі күштің әсер ету сызықтары қиылысқан нүктеге қатысты моменттерді анықтау қиындау болады. Ондай кезде моменттер центрі үшін белгісіз күштердің бірі түсірілген нүкте алынып, екі белгісізі бар моменттер теңдеуі проекциялар теңдеулерімен бірігіп шешіледі.

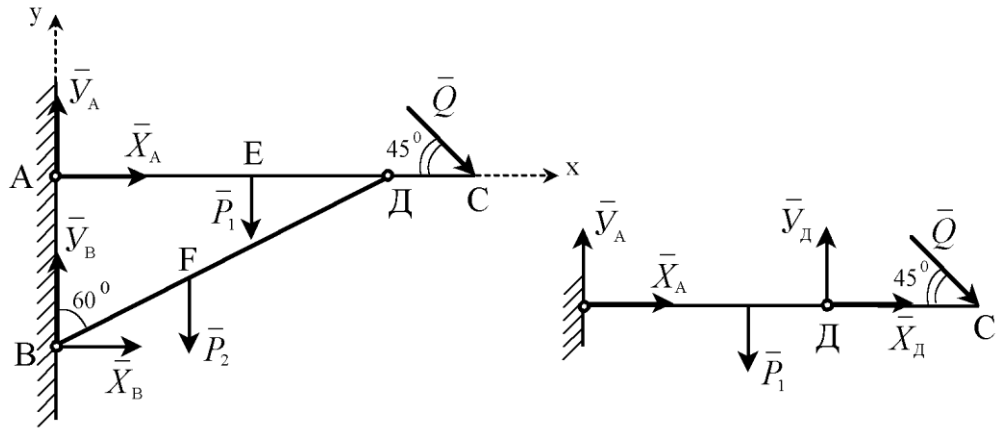
3. Егер қарастырылып отырған күштер жүйесіне қос күш кіретін болса, онда проекциялар теңдеулерін құру кезінде қос күшті құраушы күштердің кез келген өске проекцияларының қосындысы нөлге тең болатын есте ұстау керек.

Денелер жүйесіне түсірілген күштердің тепе-теңдігіне арналған келесі мысалды қарастырайық.

2 мысал. Ұзындықтары бірдей AC және BD сырықтары C нүктесінде топсамен қосылған, сонымен қатар А және В нүктелерінде вертикаль қабырғаға топсалардың көмегімен бекітілген. Сырық AC горизонталь орналасқан, сырық BD вертикаль қабырғамен 60^0 бұрыш құрады. AC сырығына E нүктесінде вертикаль $P_1 = 40kH$ күші және C нүктесінде горизонтпен 45^0 бұрыш құратын $Q = 100kH$ күші түсірілген. BD сырығына F нүктесінде вертикаль $P_2 = 40kH$ күші түсірілген.

Берілгені: $AE = EC = BF = FD = a.$

A және B топсаларының реакцияларын табу керек.



5'-сурет

Шешуі. Әуелі бүтіндей жүйенің тепе-теңдігін қарастырамыз. Оған актив күштер $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$, $\overline{Q}$ және байланыстар реакциялары $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_B, \overline{Y}_B$. әсер етеді. Алынған жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін үш теңдеулерді жазамыз:

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + X_B + Q\cos 45^0 = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A + Y_B - P_1 - P_2 - Q\sin 45^0 = 0,$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k) = 0; X_B \cdot 2a\cos 60^0 - P_1 \cdot a - P_2 \cdot a\cos 30^0 - Q\sin 45^0 \cdot 2a = 0.$$

Құрылған үш теңдеуде төрт белгісіз бар. Есепті шешу үшін сырық AC-ның тепе-теңдік шартын қосымша қарастырамыз. Оған актив күштер $\overline{P}_1$, $\overline{Q}$ және байланыстар реакциялары $\overline{X}_A, \overline{Y}_A, \overline{X}_D, \overline{Y}_D$. әсер етеді. Жетіспейтін төртінші теңдеу үшін, D нүктесіне қатысты осы күштердің моменттер теңдеуін құрамыз:

$$\sum m_D(\overline{F}_k) = 0; -Y_A \cdot 2a\cos 30^0 + P_1(2a\cos 30^0 - a) -$$
$$- Q\sin 45^0(2a - 2a\cos 30^0) = 0.$$

Құрылған төрт теңдеулерді шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз: $X_A = -287 кН$, $Y_A = 6\ кН$, $X_B = 216\ кН$, $Y_B = 145\ кН$. $\overline{X}_A$ күші теріс таңбалы болып шықты. Сондықтан, ол суретте біз көрсеткен бағытқа қарама-қарсы бағытталуы тиіс.

Топса D-ның реакцияларын табу үшін, AC сырығына түсірілген жазық күштер жүйесінің тепе-теңдігін өрнектейтін екі теңдеулерді жазамыз:

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + Q\cos 45^0 + X_D = 0,$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A + Y_D - P_1 - Q\sin 45^0 = 0.$$

Осы теңдеулерді шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз.

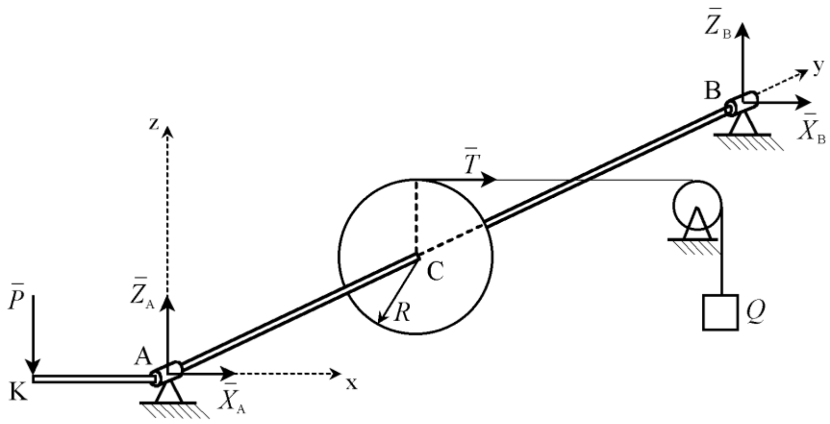
3 тақырып. КЕҢІСТІКТЕГІ КЕЗ КЕЛГЕН КҮШТЕР ЖҮЙЕСІ.
(№3 сабақ)

Мақсат: Кез келген кеңістіктік күштер жүйесінің әсеріндегі қатты дененің тепе-теңдік теңдеулерін құрастыра білу.

Тақырыптық сұрақтар:

1. Күштің өске қатысты моменті қалай есептеледі?
2. Кеңістіктік күштер жүйесінің әсеріндегі қатты дененің тепе-теңдік шарттары мен теңдеулері қандай?
3. Кеңістіктік күштер жүйесінің теңәсерлісі туралы Вариньон теоремасы.

Мысал. Чертежде сұлбасы бейнеленгендей, $Q = 800H$ жүкті жұмысшы вороттың көмегімен ұстап тұр; атанақтың радиусы $R = 5см$; саптың ұзындығы $AK = 40см$, $AC = CD = 50см$. Сап AK горизонталь болғандағы, сапқа түсірілген қысым $\overline{P}$ күшін және A және B тіректердің өстерге түсіретін қысым күштерін табу керек; $\overline{P}$ күші вертикаль (6-сурет).



6-сурет

Шешуі. Белгісіз күштерді табу үшін вороттың тепе-теңдігін қарастырамыз. Вороткa түсірілген күштер: Шамасы $\overline{Q}-$ге тең арқанның тартылыс күші $\overline{T}$, актив күш $\overline{P}$ және цилиндрлік топсалардың реакциялары $\overline{R}_A$ және $\overline{R}_B$. Соңғы реакциялар өске перпендикуляр кез келген бағытта орналасуы мүмкін, сондықтан олар $\overline{X}_A$, $\overline{Z}_A$ және $\overline{X}_B$, $\overline{Z}_B$ құраушыларымен кескінделеді. Келесі кестені толтырайық:

Кесте.

$\overline{F}_k$	$\overline{P}$	$\overline{T}$	$\overline{R}_A$	$\overline{R}_B$
F_{kx}	0	T	X_A	X_B
F_{ky}	0	0	0	0

F_{kz}	$-P$	0	Z_A	Z_B
$M_x(\overline{F}_k)$	0	0	0	$Z_B \cdot AB$
$M_y(\overline{F}_k)$	$-P \cdot AK$	$T \cdot R$	0	0
$M_z(\overline{F}_k)$	0	$-T \cdot AC$	0	$-X_B \cdot AB$

Енді күштердің кеңістік жүйесінің тепе-теңдік теңдеулерін жазамыз:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad T + X_A + X_B = 0,$$

$$\sum F_{kz} = 0; \quad -P + Z_A + Z_B = 0,$$

$$\sum M_x(\overline{F}_k) = 0; \quad Z_B \cdot AB = 0,$$

$$\sum M_y(\overline{F}_k) = 0; \quad -P \cdot AK + T \cdot R = 0,$$

$$\sum M_z(\overline{F}_k) = 0; \quad -T \cdot AC - X_B \cdot AB = 0.$$

Құрылған бес теңдеулерді шешу арқылы белгісіз күштерді табамыз:
$P = 100H$, $X_A = 400H$, $Z_A = -100H$, $X_B = -400H$, $Z_B = 0$.

КИНЕМАТИКА

4 тақырып. НҮКТЕ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ БЕРІЛУ ТӘСІЛДЕРІ. НҮКТЕ ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ ТРАЕКТОРИЯСЫ МЕН ТЕҢДЕУЛЕРІ. (№4 сабақ)

Мақсат: Нүкте қозғалысының әртүрлі берілу тәсілдерінің арасындағы байланыстарды түсіну, оларға сәйкес қозғалыс траекториялары мен заңдылықтарын анықтай білу.

Тақырыптық сұрақтар:

1. Нүкте қозғалысын берудің қандай тәсілдері бар?
2. Нүкте қозғалысын берудің координаттық тәсілінен табиғи тәсілге ауысу формулалары?
3. Нүкте қозғалысының координаттық түрдегі теңдеулері бойынша оның траекторясы қалай анықталады?
4. Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген жағдайда нүктенің траекторясы қандай ұғымға сәйкес келеді?

Мысал.

Нүктенің қозғалысы мынадай теңдеулермен берілген:

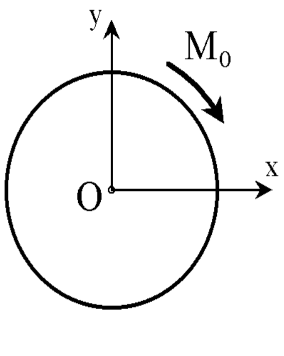
$$x = 3\sin t, y = 3\cos t. \qquad (a)$$

Нүкте қозғалысының теңдеулері (*а*) арқылы оның траекториясының теңдеуін және нүктенің траектория бойымен қозғалысының заңын анықтау керек. Траектория бойымен есептелетін қашықтық S нүктенің бастапқы орнынан бастап саналады.

Шешуі. Нүкте траекториясын табу үшін нүкте қозғалысының заңын өрнектейтін (*а*) теңдеулерінен параметр рөлін атқаратын уақыт *t*-ны аластау керек. Ол үшін (*а*) теңдеулерінің екі жағын да квадраттап алып, біріне-бірін қосамыз:

$$x^2 + y^2 = 9\sin^2 t + 9\cos^2 t, \text{ немесе } x^2 + y^2 = 9. \qquad (б)$$

(*б*) теңдеуі нүктенің шеңбер бойымен қозғалатынын көрсетеді (10 сурет).



10 сурет

Траектория бойымен қозғалыс заңдылығын анықтаймыз. Қозғалыс басталардағы уақытты $t_0 = 0$ десек, онда нүкте $M(0,3)$ орнында болады. Қашықтықты $S-$деп белгілесек, ол S мынадай формула арқылы есептеледі:

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt. \qquad (в)$$

x және *y*-тен уақыт *t* бойынша туынды аламыз:

$$\dot{x} = 3\cos t, \dot{y} = -3\sin t.$$

Осы өрнектерді (*в*)-ға қоя отырып, алатынымыз

$$S = \int_0^t 3\,dt \quad \text{немесе} \quad S = 3t. \qquad (г)$$

(*г*) теңдеуі траектория бойымен нүктенің қозғалыс заңдылығын береді. (*в*)-теңдеуге сәйкес, t=0 болғанда *x*=0, *y*=3 болады, яғни нүкте M_0 орнында болады (10 сурет), уақыт *t* өсе бастағанда *x* өседі, ал *y* кемиді. Сонымен, доғалық координата *S*-тің басы M_0 нүктесінде жатыр, ал қозғалыс шеңбер бойымен 10 суретте көрсетілген бағытта бағытталады.

4тақырып. ҚОЗҒАЛЫСЫ КООРДИНАТТЫҚ ТӘСІЛМЕН БЕРІЛГЕН НҮКТЕНІҢ ЖЫЛДАМДЫҒЫ. НҮКТЕНІҢ ЖАНАМА ЖӘНЕ НОРМАЛЬ ҮДЕУЛЕРІ.
(№4 сабақ)

Мақсат: Нүкте қозғалысының жылдамдығы мен үдеулерін есептей білу.

4.1 Қозғалысы координаттық тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығы.

Тақырыптық сұрақтар:

1. Берілген уақыт мезетіндегі нүктенің жылдамдық векторы қалай анықталады?
2. Қозғалысы табиғи тәсілмен берілген нүкте жылдамдығының модулі қалай анықталады?
3. Нүкте жылдамдығының оның траекториясына жанамаға түсірілген проекциясы қалай анықталады?
4. Нүкте жылдамдығының қозғалмайтын декарттық координаталар өстеріне проекциялары қалай анықталады?
5. Қозғалысы координаттық тәсілмен берілген нүктенің жылдамдық векторының модулі мен бағыты қалай анықталады?

Мысал.

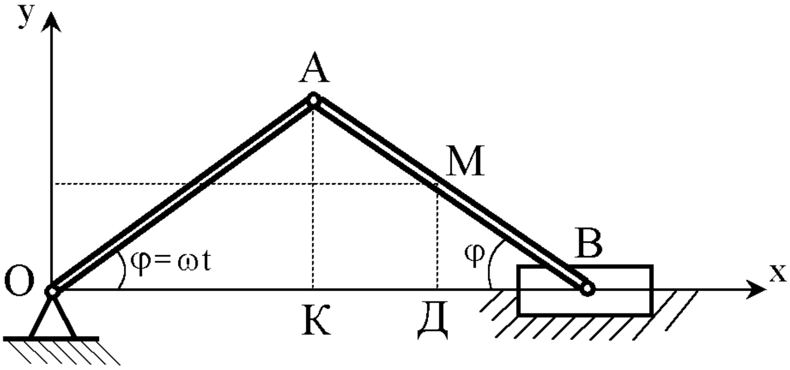
Қосиін *ОА* тұрақты ω бұрыштық жылдамдықпен айнала қозғалады. Қосиін-бұлғақты механизм бұлғағының ортасында орналасқан *М* нүктесінің және жылжыма *В*-ның жылдамдықтарын табу керек. $OA = AB = a.$

Шешуі. *М* және *В* нүктелерінің қозғалыс теңдеулері берілмеген, сондықтан оларды құру қажет. Механизмді кез келген орнында кескіндейміз. Координаттар өстері 11-суретте көрсетілген. *М* және *А* нүктелерінен өстерге *МД, МЕ* және *АК* перпендикуляр түзулерді тұрғызамыз. Онда алатынымыз:

$$x_M = ME = OK + KD = OA\cos\varphi + AM\cos\varphi,$$

$$y_M = MD = MB\sin\varphi,$$

$$x_B = OB = 2\cdot OK = 2\cdot AB\cdot\cos\varphi.$$



11-сурет

$AB = OA = a$, $AM = a/2$, $\alpha = \omega t$, мәндерін ескере отырып, M және B нүктелерінің қозғалыс теңдеулерін құрамыз:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{2a\cos\omega t}{3}, \\ y_M = \dfrac{a\sin\omega t}{2}, \end{cases}$$

$$x_B = 2a\cos\omega t.$$

M және B нүктелерінің жылдамдықтарын анықтаймыз:

$$v_{\text{x}_\text{м}} = \dot{x}_\text{M} = -\frac{3}{2}a\cdot\omega\cdot\sin\ \omega t\,,$$

$$v_{\text{y}_\text{м}} = \dot{y}_\text{M} = \frac{a}{2}\omega\cdot\cos\ \omega t,$$

$$v_\text{M} = \sqrt{v_{\text{x}_\text{м}}^2 + v_{\text{y}_\text{м}}^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2\omega^2\sin^2\omega t + \frac{a^2\omega^2}{4}\cos^2\omega t} = \frac{a}{2}\omega\sqrt{8\cdot\sin^2\omega t + 1},$$

$$v_\text{B} = \dot{x}_\text{B} = -2a\cdot\omega\cdot\sin\ \omega t\,.$$

4.2 Қозғалысы әртүрлі тәсілдермен берілген нүктенің үдеуі.

Тақырыптық сұрақтар:

1. Нүктенің үдеу векторы неге тең және ол траекторияға қарағанда қалай орналасады?
2. Нүкте үдеуінің қозғалмайтын декарттық координаталар өстеріне проекциялары қалай анықталады?
3. Қозғалысы координаттық тәсілмен берілген нүктенің үдеу векторының модулі мен бағыты қалай анықталады?
4. Траекторияның әрбір нүктесіндегі табиғи координаттық өстер (табиғи үшжақтың өстері) қалай бағытталған?
5. Нүкте үдеуі қандай жазықтықты орналасады және оның табиғи өстердегі проекциялары неге тең?
6. Нүктенің тангенциальды және нормаль үдеулері нені сипаттайды?

Мысал.

Дизельдің қосиін жұдырықшасының қозғалысы: $x = 75\cos 4t^2, y = 75\sin 4t^2$ теңдеулерімен берілген. Жұдырықша жылдамдығын, жанама және нормаль құраушы үдеулерін табу керек.

Шешуі. Нүкте жылдамдығының өстерге проекцияларын анықтаймыз:

$$V_x = \dot{x} = -600t \cdot \sin\ 4t,^2$$
$$V_y = \dot{y} = 600t \cdot \cos\ 4t^2. \tag{1}$$

Жылдамдық модулі мынадай формуламен анықталады:

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_У^2} = \sqrt{600^2 t^2 \sin^2 4t^2 + 600^2 t^2 \cos^2 4t^2} = 600t \text{ (см/с)}. \tag{2}$$

Жанама құраушы үдеуі жылдамдықтың жанама өске проекциясынан уақыт бойынша алынған бірінші туындысына тең:

$$a_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = \frac{d(600t)}{dt} = 600 \text{ (см/с}^2\text{)}. \tag{3}$$

Жылдамдықтың сәйкес өстердегі проекцияларынан уақыт бойынша бірінші туындыларын есептей отырып, үдеудің координаттар өстеріне проекцияларын анықтаймыз:

$$a_x = \dot{V}_x = -4800t^2 \cdot \cos\ 4t^2 - 600 \cdot Sin\ 4t^2,$$
$$a_y = \dot{V}_y = -4800t^2 \cdot \sin\ 4t^2 + 600 \cdot \cos 4t^2.$$

Үдеу модулі мынадай формуламен анықталады:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 = 4800t^4 \cdot \cos^2 4t^2 + 2 \cdot 4800 \cdot 600 \cdot \cos 4t^2 \cdot \sin\ 4t^2 +$$
$$+ 600^2 \cdot \sin^2 4t^2 + 4800^2 t^2 \cdot \sin^2 4t^2 - 2 \cdot 4800 \cdot 600 \cdot \cos^2 4t \cdot \sin^2 4t^2 +$$
$$+ 600^2 \cdot \cos^2 4t,^2 \qquad (4)$$
$$a^2 = 4800^2 \cdot t^4 + 600.^2$$

Толық үдеу мен жанама және нормаль құраушыларының арасында мынадай байланыс бар:

$$a^2 = a_n^2 + a_\tau^2. \qquad (5)$$

(3)-ті ескере отырып (5) және (4)-тен алатынымыз:

$$a_n^2 = 4800^2 t^4.$$

Осыдан*:*

$$a_n = 4800 t^2 \text{ (см/с}^2\text{)}.$$

4.3 Нүктенің бірқалыпты және бірқалыпты айнымалы қисық сызықты қозғалысы.

Тақырыптық сұрақтар:

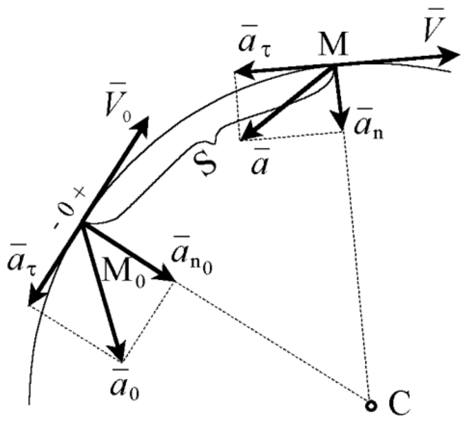
1. Нүктенің қандай қозғалысында тангенциаль үдеуі нөлге тең болады, және қандай қозғалысы кезінде нормаль үдеуі нөлге тең.?
2. Үдеуге байланысты нүкте қозғалысын қандай түрлерге бөлуге болады?
3. Нүктенің бірқалыпты және бірқалыпты айнымалы қисық сызықты қозғалысының заңдылықтарын жазыңыз?
4. Қисық сызықты қозғалыс кезінде нормаль үдеу қай уақытта нөлге айналуы мүмкін?
5. Бірқалыпсыз қозғалыс кезінде тангенциаль үдеу қай уақытта нөлге айналуы мүмкін??

Мысал.

Поезд радиусы R = 88 м доға бойымен бірқалыпты тежемелі қозғалып, s = 800 м жол жүреді. Сондағы оның бастапқы жылдамдығы V_0 = 54 км/сағ, ал соңғы жылдамдығы v = 18 км/сағ болды. Доғаның басы мен соңындағы поездың толық үдеуін, сонымен қатар осы доғаны жүріп өтуге кеткен уақытты анықтау керек.

Шешуі: Поездың бір нүктесінің (ауырлық центрінің) қозғалысын қарастырамыз. Доғалық координатаның бастапқы санақ нүктесі O-ны M нүктесінің бастапқы орнымен беттестіреміз және қозғалыс бағытын оң бағыт деп аламыз (12 сурет). Сонда s_0 = 0.

Нүктенің бірқалыпты тежемелі қозғалыс теңдеуі мен жылдамдығы келесі өрнектермен анықталады:



12 сурет

$$S = V_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2} \qquad (1)$$

$$V = V_0 - a_\tau \cdot t \qquad (2)$$

Есептің шарттары бойынша: M нүктесінің жол соңындағы доғалық координатасы s = 800 м, бастапқы жылдамдығы v_0 = 54 км/ч = 15 м/с, соңғы жылдамдығы v = 18 км/ч = 5 м/с, ал шеңбердің радиусы R = 800 м.

Белгілі шамаларды (1), (2) -ге қойсақ:

$$800 = 15t - \frac{a_\tau t^2}{2}, \quad 5 = 15 - a_\tau \cdot t.$$

Алынған теңдеулерді бірге шешіп, қозғалысқа кеткен уақытты және тангенциаль үдеуді анықтаймыз.

$$t = \frac{15-5}{a_\tau} = \frac{10}{a_\tau},$$

$$800 = \frac{15 \cdot 10}{a_\tau} - \frac{a_\tau \cdot 100}{2 \cdot a^2{}_\tau}, \qquad a_\tau = 0{,}125 \quad \text{м/с}^2$$

$$800 = \frac{100}{a_\tau} \qquad t = T = 80 \text{ с.}$$

Жолдың басындағы нүктенің нормаль үдеуінің модулі:

$$a_{n_0} = \frac{V_0^2}{R} = \frac{225}{800} \approx 0{,}28 \quad \text{м/с}^2,$$

ал жол соңында: $a_n = \dfrac{V^2}{R} = \dfrac{25}{800} \approx 0{,}03 \quad \text{м/с}^2.$

Жолдың басындағы және соңындағы нүктенің толық үдеуінің модулі:

$$a_0 = \sqrt{a_\tau^2 + a_{n_0}^2} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}28^2} \approx 0{,}308 \quad \text{м/с}^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{0{,}125^2 + 0{,}03^2} \approx 0{,}129 \quad \text{м/с}^2.$$

5 тақырып. ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ІЛГЕРІЛЕМЕЛІ ЖӘНЕ АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСЫ.
ҚАТТЫ ДЕНЕНІҢ ЖАЗЫҚ ПАРАЛЛЕЛЬ ҚОЗҒАЛЫСЫ.
(№5 сабақ)

Мақсат: Қатты дененің қарапайым қозғалыстары мен жазық параллель қозғалысы кезіндегі оның құрамындағы нүктелердің қозғалыс заңдылықтарын, жылдамдықтары мен үдеулерін есептей білу.

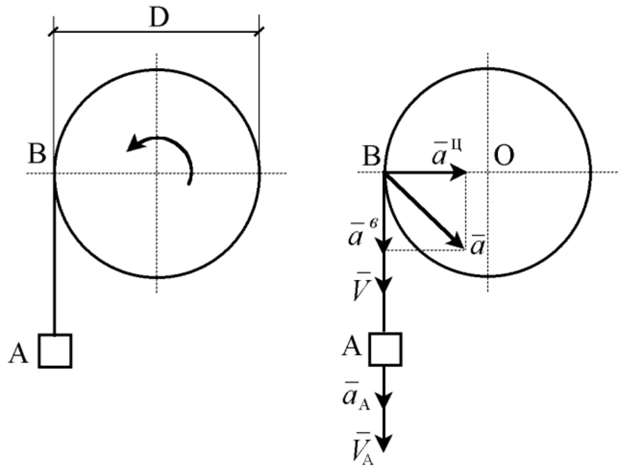
5.1 Қатты дененің айналмалы қозғалысы.

Тақырыптық сұрақтар:

1. Қатты дененің қандай қозғалысы қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналыс деп аталады?
2. Айналып тұрған қатты дененің бұрыштық жылдамдығы мен бұрыштық үдеуінің модулдері қандай формулалармен анықталады?
3. Айналу бұрышы, бұрыштық жылдамдық және бұрыштық үдеу қандай бірліктермен өлшенеді?
4. Қатты дененің қозғалмайтын өс төңірегіндегі айналысы кезінде бұрыштық жылдамдық және бұрыштық үдеу векторлары қалай бағытталады?
5. Қозғалмайтын өс төңірегінде айналатын қатты дене нүктелерінің жылдамдығы мен үдеуінің модулдерін анықтайтын формулалар?
6. Бірқалыпты және бірқалыпты айнымалы айналмалы қозғалыс заңдарын жазыңыз?

Мысал. Атанаққа оралған жіпке ілінген жүк A, атанақты айналмалы қозғалысқа келтіре отырып, тыныштық қалпынан бірқалыпты үдемелі төменгі бағытта қозғалады. Атанақ бірінші $3 сек$ аралығында 9 айналым жасайды. Атанақтың диаметрі $D = 30\, см$.

Атанақ бетіндегі нүктенің $5 сек$ уақыт мезгіліндегі жылдамдығын және үдеуін табу керек (13-сурет).



а) б)

13-сурет.

Шешуі. Атанақтың бірқалыпты айнымалы айналмалы қозғалыс теңдеуін жазамыз:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}. \qquad (1)$$

Бұрыштық жылдамдықтың айналу өсіндегі проекциясы айналу бұрышы (1)-ден уақыт бойынша алынған туындыға тең:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t. \qquad (2)$$

Бастапқы мәндері: φ_0=0, ω_0=0. Осы шарттарды ескере отырып (1) және (2) - теңдеулерді мына түрде жазамыз:

$$\varphi = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \qquad (3)$$

$$\omega = \varepsilon \cdot t. \qquad (4)$$

t=3c уақыт мезгілінде φ=9 айналыс болғандықтан, (3) – теңдеуден бұрыштық үдеу ε – ді табамыз:

$$\varepsilon = \frac{2\varphi}{t^2} = 2 \text{ об/с}^2 = 4\pi \text{ с}^{-2}.$$

(4)–теңдеуден $t = 5c$ мезгіліндегі атанақтың бұрыштық жылдамдығы ω-ны табамыз:

$$\omega_5 = 4\pi \cdot 5 = 20\pi \text{ с}^{-1}.$$

Атанақтың бетіндегі B нүктесінің (13б-сурет) сызықтық жылдамдығын, жанама және нормаль құраушы үдеулерін осы уақыт мезгілінде анықтаймыз:

$$v_5 = R \cdot \omega_5 = 0{,}15 \cdot 20\pi = 3 \cdot 3{,}14 = 9{,}42 \text{ м/с},$$

$$a_5^\tau = a^\tau = R \cdot \varepsilon = 0{,}15 \cdot 4\pi = 0{,}6 \cdot 3{,}14 = 1{,}88 \text{ м/с}^2,$$

$$a_5^{\text{n}} = R \cdot \omega_5^2 = 0{,}15 \cdot 400\pi^2 = 60 \cdot 9{,}86 = 591{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Атанақтың бетіндегі нүктенің толық үдеуінің модулі:

$$a_5 = \sqrt{\left(a_5^\tau\right)^2 + \left(a_5^{\text{n}}\right)^2} = \sqrt{1{,}88^2 + 591{,}6^2} \approx 592 \text{ м/с}^2.$$

Жүктің жылдамдығы атанақтың бетіндегі нүктенің сызықтық жылдамдығына тең:

$$v_{A5} = v_5 = 9{,}42 \text{ м/с}.$$

Жүктің үдеуі атанақтың бетіндегі нүктенің жанама құраушы үдеуіне тең:

$$a_A = a^{в} = 1{,}88 \text{ м/с}^2.$$

5.2 Жазық фигура қозғалысының теңдеулерін құру. Дене нүктелерінің траекториясын анықтау.

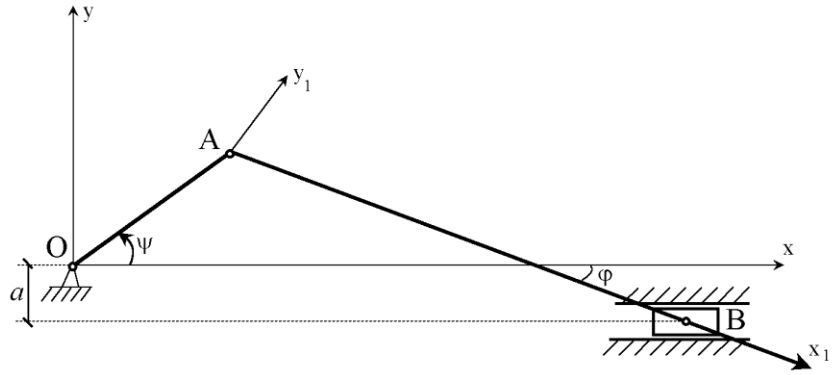
Тақырыптық сұрақтар:

1. Қатты дененің қандай қозғалысы жазық параллель қозғалыс деп аталады?
2. Жазық фигураның ілгерілемелі орын ауыстыруы мен бұрылуы таңдап алынған полюске тәуелді ме?
3. Қатты дененің жазық қозғалысының теңдеулері?
4. Жазық фигураның кез келген нүктесінің қозғалыс теңдеуі?
5. Нүкте қозғалысының теңдеулерінен оның траекториясының теңдеуін қалай алуға болады?

Мысал.

Қосиін-бұлғақты механизмде қосииннің айналу центрі жылжыма B-ның горизонталь траекториясынан a қашықтықта орналасқан. Қосииннің бұрылу бұрышы $\psi=kt$ заңдылығымен өзгереді, мұндағы k-тұрақты коэффициент. Қосииннің ұзындығы $OA=r$, ал бұлғақтікі $AB = l$.

Бұлғақ AB-ның жазық параллель қозғалыс теңдеулерін анықтау керек.



14-сурет

Шешуі. Бас нүктесі O болатын қозғалмайтын xOy координаттар жүйесін жүргіземіз (14-сурет). Бас нүктесі A болатын қозғалмалы x_1Ay_1 координаттар жүйесін таңдап аламыз. Сонымен, қосииннің A нүктесі полюс болады.

Полюстің қозғалыс теңдеулерін жазамыз:

$$x_A = OA \cdot \cos\psi = r \cdot \cos kt,$$

$$y_A = OA \cdot \sin\psi = r \cdot \sin kt.$$

Бұлғақтың бұрылу бұрышы мен уақыт арасындағы байланысы болатын үшінші теңдеуді табу үшін, AB кесіндісін y өсіне проекциялаймыз. x_1 және x өстерінің арасындағы бұрышты φ арқылы белгілеп, мынадай теңдік аламыз:

$$AB\sin\varphi = OA\sin\psi + a,$$

немесе, $AB = l$, $OA = r$, $\psi = kt$ болғандықтан:

$$\sin\ \varphi = \frac{r}{l}\sin\ kt + \frac{a}{l}.$$

Бұлғақ *AB*-ның жазық параллель қозғалыс теңдеулері мынадай болып шығады:

$$\begin{cases} x_A = r\cos kt \\ y_A = r\sin kt \\ \sin\varphi = \dfrac{r\sin kt}{l} + \dfrac{a}{l} \end{cases}.$$

5 тақырып. ЖАЗЫҚ ФИГУРА НҮКТЕЛЕРІНІҢ ЖЫЛДАМДЫҚТАРЫ МЕН ҮДЕУЛЕРІН АНЫҚТАУ. НҮКТЕНІҢ КҮРДЕЛІ ҚОЗҒАЛЫСЫ. (№5 сабақ)

Мақсат: Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтары мен үдеулерін есептей білу. Нүктенің күрделі қозғалыстағы траекториясы мен қозғалыс теңдеулерін анықтай білу.

5.1 Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарын жылдамдықтардың лездік центрінің көмегімен анықтау**.**

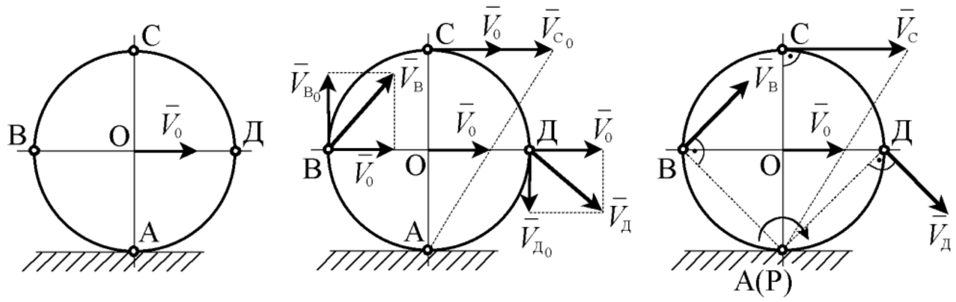
Тақырыптық сұрақтар:

1. Қатты дененің қандай қозғалысы жазық қозғалыс деп аталады?
2. Жазық фигура нүктелерінің жылдамдықтарының үлестірілу формуласын жазыңыз.
3. Өзгермейтін кесінді нүктелерінің жылдамдықтарының сол кесіндімен беттесетін өске проекциялары өзара тең болатындығын көрсетіңіз.
4. Жазық фигураның қандай нүктесін жылдамдықтардың лездік центрі деп атайды?
5. Жылдамдықтардың лездік центрін анықтаудың негізгі дербес жағдайлары қандай?

Мысал.

Радиусы *R*=0,5м түзу рельс бойымен сырғанамай дөңгелеп қозғалады; оның центінің жылдамдығы тұрақты және v_0=10 м/с-ке тең.

Дөңгелектің горизонталь және вертикаль диаметрлерінің соңғы *A, B, C, D* нүктелерінің жылдамдықтарын және бұрыштық жылдамдығын анықтау керек.



15-сурет

Шешуі: <u>I-тәсіл</u> (жылдамдықтардың таралу формулаларын пайдалану):

Полюс ретінде *O* центрін қабылдаймыз (15-сурет). Онда дөңгелектің кез келген нүктесінің жылдамдығы полюс жылдамдығы мен полюсті айнала қозғалыс жылдамдығының геометриялық қосындысына тең, мысалы $\bar{v}_A = \bar{v}_O + \bar{v}_{AO}$. Дөңгелек сырғанамай дөңгелеп қозғалатын болғандықтан дөңгелек пен рельстің жанасушы *A* нүктесінің жылдамдығы нөлге тең $v_A = 0$, яғни *A* нүктесі лездік жылдамдық центрі болып табылады. Бұл нүктеде полюсті айнала қозғалыс жылдамдығы $\bar{v}_{AO}$ –мен полюс жылдамдығы $\bar{v}_O$ –ның шамалары тең, ал бағыттары қарама-қарсы, яғни $\bar{v}_{AO} = -\bar{v}_O$. *A, B, C, D* нүктелерінен полюске дейінгі ара қашықтықтары тең. Сондықтан, нүктелердің полюсті айнала қозғалыс жылдамдықтары өзара тең, яғни $v_{BO} = v_{CO} = v_{DO} = v_{AO} = v_O$.

Әрбір нүктеден полюс жылдамдығы $\bar{v}_O$ –ны және дөңгелектің радиусына перпендикуляр полюсті айнала қозғалыс жылдамдығын тұрғызып табатынымыз:

$$v_B = \sqrt{v_O^2 + v_{BO}^2} = 14{,}14\, м/с, \;\; v_C = \sqrt{v_O^2 + v_{DO}^2} = 20\, м/с,$$

$$v_D = \sqrt{v_O^2 + v_{DO}^2} = 14{,}14\, м/с.$$

Бұрыштық жылдамдығы:

$$\omega = \frac{v_{BO}}{R} = \frac{v_O}{R} = 20\, рад/с.$$

<u>II-тәсіл</u> (жылдамдықтар лездік центрін пайдалану):

Дөңгелектің жылдамдықтар лездік центрі *A*–ны полюс ретінде қабылдаймыз. Онда дөңгелектің барлық нүктелерінің жылдамдықтары жылдамдықтар лездік центрін айнала қозғалыс жылдамдықтары болады. Барлық нүктелердің жылдамдықтарының шамалары мынадай қатынастармен анықталады:

$$v_C = v_O \frac{PC}{PO} = 20\,м/с,\; v_B = v_O \frac{PB}{PO} = 14{,}14\,м/с,$$

$$v_D = v_O \frac{PD}{PO} = 14{,}14\,м/с,$$

мұндағы, $PC = 2R, PB = PD = \sqrt{2}R$.

Бұрыштық жылдамдығы мынадай қатынаспен анықталады:

$$\omega = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R} = 20\,рад/с.$$

Ескертулер.

1. Сызбаларды дұрыс құруға ерекше көңіл бөлу керек. Сызбаларда механизм звеноларының орындары берілген уақыт мезетіне немесе есептің берілген шартына сәйкес болуы керек.

2. Бірнеше звенолардан құрылған механизмдерге байланысты есептерді шығару барысында, берілген уақыт мезетінде әрбір звеноның өзінің лездік жылдамдықтар центрі бар екенін есте ұстау керек. Осыған байланысты лездік жылдамдықтар центрлерін осы звенолардың индекстерімен белгілеген жөн.

5.2 Жазық қозғалыстағы қатты дене нүктелерінің үдеулері.

Тақырыптық сұрақтар:

1. Жазық фигураның кез келген нүктесінің үдеуі қалай анықталады?
2. Жазық фигураның қандай нүктесін үдеулердің лездік центрі деп атайды?
3. Үдеулердің лездік центрі жылдамдықтардың лездік центрімен беттесуі мүмкін бе?

Мысал.

Радиусы *R=12см* тістегерішті радиусы сондай қозғалмайтын тістегеріштің өсі О-ға қатысты айнала қозғалатын қосиин *OA* қозғалысқа келтіреді; қосиин $\varepsilon = 8\,рад/с$ бұрыштық жылдамдықпен айналады және сол уақыт мезгілінде бұрыштық жылдамдығы $\omega = 2\,рад/с$. 2-тістегеріштің N нүктесінің үдеуін анықтау керек (16-сурет).

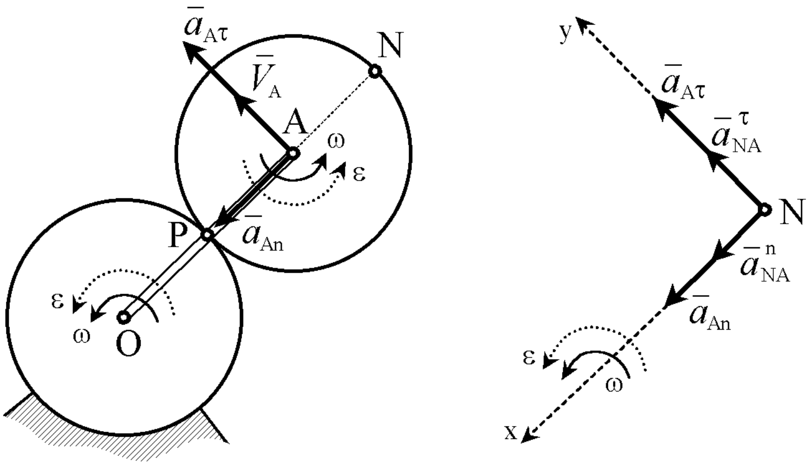
Шешуі. 1. $\bar{v}_A$ және $\bar{a}_A$-ны анықтаймыз. Есепті шешу үшін 2-тістегеріштің қозғалысын қарастырамыз. Есептің берілгені бойынша тістегеріштің *A* нүктесінің $\bar{v}_A$ жылдамдығын және $\bar{a}_A$ үдеуін есептеу жеңіл және осы нүктені полюс ретінде қабылдаймыз:

$$v_{\mathrm{A}} = \mathrm{OA}\cdot\omega = 24\cdot 2 = 48 \text{ см/с} = 0{,}48 \text{ м/с},$$

$$a_{\mathrm{A}\tau} = \mathrm{OA}\cdot\varepsilon = 0{,}24\cdot 8 = 1{,}92 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{\mathrm{An}} = \mathrm{OA}\cdot\omega^2 = 0{,}24\cdot 4 = 0{,}96 \text{ м/с}^2.$$

$\bar{v}_{\mathrm{A}}$, $\bar{a}_{\mathrm{A}\tau}$, $\bar{a}_{\mathrm{An}}$ векторларының бағыттары 16-суретте көрсетілген.



16-сурет

2. Тістегеріш 2-нің бұрыштық жылдамдығы ω_2-ні анықтаймыз. Тістегеріштің жанасу *P* нүктесі ЖЛЦ болады, сондықтан:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A}{R}; \quad \omega_2 = \frac{0{,}48}{0{,}12} = 4c^{-1}.$$

ω_2-ның бағытын (тістегеріштің айналу бағытын) $\bar{v}_{\mathrm{A}}$ анықтайды.

3. Тістегеріш 2-нің бұрыштық үдеуі ε_2-ні анықтаймыз. *AP* = *R* шамасы барлық уақытта тұрақты, сондықтан:

$$\varepsilon^2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{R}\cdot\frac{dv_A}{dt} = \frac{\omega_{A\tau}}{R},$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1{,}92}{0{,}12} = 16c^{-2}. \tag{1}$$

4. Нүкте *N*-нің үдеуін мынадай формуламен анықтаймыз:

$$\bar{a}_{\mathrm{N}} = \bar{a}_{\mathrm{A}\tau} + \bar{a}_{\mathrm{A}n} + \bar{a}_{\mathrm{NA}}^{\tau} + \bar{a}_{\mathrm{NA}}^{n}. \tag{2}$$

Бұл үшін $\bar{a}_{\mathrm{NA}}^{\tau}$ және $\bar{a}_{\mathrm{NA}}^{n}$ шамаларын анықтаймыз. Біздің жағдайда *NA* = *R* және:

$$\bar{a}_{\mathrm{NA}}^{\tau} = \mathrm{NA} \cdot \varepsilon_2 = 0{,}12 \cdot 16 = 1{,}92 \ \text{м/с}^2,$$
$$\bar{a}_{\mathrm{NA}}^{n} = \mathrm{NA} \cdot \omega_2^2 = 0{,}12 \cdot 16 = 1{,}92 \ \text{м/с}^2.$$

Суретте (16 б-сурет) $\bar{a}_{\mathrm{A}\tau}$, $\bar{a}_{\mathrm{An}}$, $\bar{a}_{\mathrm{NA}}^{\tau}$, $\bar{a}_{\mathrm{NA}}^{n}$ векторларының бағыттарын көрсетеміз.

5. $\bar{a}_{\mathrm{N}}$-ді есептейміз. *Nx* және *Ny* өстерін жүргіземіз, $\bar{a}_{\mathrm{N}}$-ді осы өстерге проекциялары арқылы анықтаймыз:

$$a_{\mathrm{Ny}} = a_{\mathrm{A}\tau} + a_{\mathrm{NA}}^{\tau} = 1{,}92 + 1{,}92 = 3{,}84 \ \text{м/с,}^2$$
$$a_{\mathrm{Nx}} = a_{\mathrm{A}n} + a_{\mathrm{NA}}^{n} = 0{,}96 + 1{,}92 = 2{,}88 \ \text{м/с}^2.$$

Осыдан:

$$a_{\mathrm{N}} = \sqrt{a_{\mathrm{Nx}}^2 + a_{\mathrm{Ny}}^2} \approx 4{,}8 \ \ \text{м/с}^2.$$

Ескертулер.

1. Есеп шығару кезінде қатты дене қарастырылып отырған нүктесінің удеуі анықталуы тиіс орнына сәйкес кескінделуі керек. Есептеулер есептің берілгендері бойынша полюс ретінде алынған нүктенің жылдамдығы мен үдеуін анықтаудан басталады.

2. ε шамасы (1) теңдігімен тек *AP* арақашықтығы тұрақты болғанда ғана анықталатынын ескеру керек. Кері жағдайда бұрыштық үдеу ε және a_N үдеуі (2) теңдеуін $\bar{a}_{\mathrm{NA}}^{\tau}$ и $\bar{a}_{\mathrm{NA}}^{n}$ векторларының бағыттарына проекциялау арқылы алынатын екі теңдеуден табылады.

ДИНАМИКА

6 тақырып. Материялық нүкте қозғалысының диференциалдық теңдеулері. Динамиканың бірінші есебінің шешуі.

(№6 сабақ)

Мақсат: Материялық нүкте қозғалысын зерттеуде Ньютонның екінші заңынан туындайтын дифференциалдық теңдеулерді дұрыс қолдана білу.

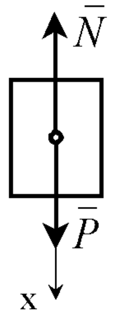
Бақылау сұрақтары:

1. Нүкте динамикасының негізгі теңдеуі?
2. Материялық нүкте қозғалысының декарттық координаттық өстерге қатысты алынған дифференциалдық теңдеулері?
3. Материялық нүкте қозғалысының табиғи координаттарға қатысты алынған дифференциалдық теңдеулері?
4. Динамиканың негізгі есептері?

Мысал.

Салмағы 1.02 кГ жүк жатқан горизонталь платформа 4 м/с^2 үдеумен вертикаль төмен қозғалады (20-сурет). Олар бірге қозғалғанда жүктің платформаға түсіретін қысым күшін табу керек.

Шешуі. Жүкке бір ғана актив күші түсірілген – оның салмағы $\overline{P}$. Байланыстардан босату аксиомасын пайдаланып, ойша платформаны алып тастаймыз да, оның әсерін вертикаль жоғары бағытталған $\overline{N}$ реакция күшімен ауыстырамыз.



20-сурет

x–өсін вертикаль төмен қозғалыс бағытымен бағыттаймыз (20-сурет). Жүк қозғалысының негізгі теңдеуі мына түрде жазылады:

$$ma = P - N,$$

осы теңдеуден: $N = P - ma = 1.02 \cdot 9{,}8 - 1.02 \cdot 4 = 5.92$ *Н*.

Яғни, жүктің платформаға түсіретін қысым күші де 5.92 *Н*-ға тең болады.

Мысал.

Массасы 2кг материалық нүктенің қозғалысы мына теңдеулермен анықталады: $x = 3Cos\ 2\pi t$, $y = 4\sin \pi t$ (см).

Нүктеге әсер етуші күштің проекцияларының нүкте координаттарына тәуелділігін анықтау керек.

Шешуі. Алдымен нүкте үдеуінің проекцияларын табамыз. Ол үшін есептің шартында берілген қозғалыс теңдеулерінен уақыт бойынша екі рет туынды аламыз:

$$\ddot{x} = -12\pi^2 Cos\ 2\pi t, \qquad \ddot{y} = -4\pi^2 Sin\ \pi t.$$

Нүкте қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін пайдалану арқылы күштің координаттар өстеріндегі проекцияларын табамыз:

$$F_x = m\ddot{x} = -12\pi^2 m \cdot Cos\ 2\pi t, \qquad F_y = m\ddot{y} = -4\pi^2 m \cdot Sin\ \pi t.$$

Сан мәндерін орындарына қойып, нүктеге әсер етуші күштің проекцияларының нүкте координаттарына тәуелділігін анықтаймыз:

$$F_x = -0{,}0789x, \quad F_y = -0{,}0197y \text{ (Н)}.$$

6 тақырып. Нүктенің қозғалыс мөлшері. Күш импульсі. Нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема. (№6 сабақ)

Мақсат: Материялық нүкте қозғалысын сипаттайтын шамалардың бірі қозғалыс мөлшері мен сол нүктеге әсер ететін күштердің импульстерінің арасындағы тәуелділікті тағайындайтын қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманы есептер шығаруда қолдана білу.

Бақылау сұрақтары:

1. Шектеулі уақыт аралығындағы тұрақты және айнымалы күштердің импульстері қалай анықталады?
2. Күштің импульсі нені сипаттайды?
3. Күштің импульсінің координат өстеріне проекциялары неге тең?
4. Материялық нүктенің қозғалыс мөлшері дегеніміз не?
5. Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема қалай айтылады?
6. Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің центрге және өске қатысты моменттері қалай анықталады?
7. Материялық нүктенің қозғалыс мөлшерінің моментінің өзгеруі туралы теорема жалпы жағдайда және центрлік күштер жағдайында қалай айтылады?

Мысал. Горизонтпен α бұрышын жасайтын тегіс емес көлбеу жазықтық бетімен салмақты дене төмен түсіп келеді. Дененің l = 39.2 *м* жолды қанша уақыт ішінде жүріп өтетінін анықтау керек. Көлбеу жазықтықтың үйкеліс коэффициенті f = 0.2, көлбеу бұрышы α =30°, дененің бастапқы жылдамдығы $v_0 = 0$ (21-сурет).

Шешуі. Есептің шартына сай сурет салып аламыз (21-сурет).

Сызбада денеге түсірілген күштерді көрсетейік. Олар: $m\overline{g}$ - дененің салмағы, $\overline{N}$ - беттің нормаль реакциясы, $\overline{F}_{тр}$ - үйкеліс күші, бұл жердегі

$$\overline{F}_{тр} = f \cdot N = f \cdot mg$$

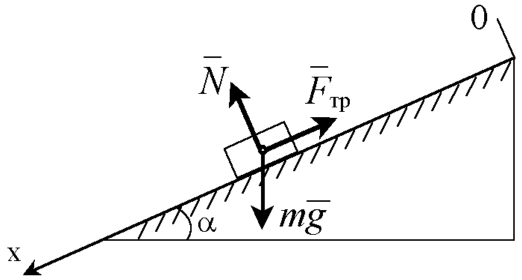
x өсін көлбеу жазықтықтың бойымен қозғалыс бағытмен төмен бағыттаймыз.

Қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың x өсіндегі проекциясын жазамыз:

$$mv_x - mv_{0x} = \sum_{k=1}^{n} S_x\left(\overline{F}_к\right), \qquad (a)$$

бұл жерде есептің шартына сәйкес $v_0 = 0 \Rightarrow \quad v_{0x} = 0$,

$$\sum S_x\left(\overline{F}_ê\right) = S_x\left(\overline{F}_{Тр}\right) + S_x\left(m\overline{g}\right) + S_x\left(\overline{N}\right).$$



21-сурет

Денеге әсер етуші барлық күштердің тұрақты екенін ескеріп, әрбір күштің импульсін есептейміз:

$$S_x\left(\overline{F}_{Тр}\right) = -F_{Тр}\left(t - t_0\right) = -F_{Тр} \cdot t$$

$$S_x\left(m\overline{g}\right) = mg \cdot Sin\,\alpha \cdot t \qquad \Rightarrow \sum S_x\left(\overline{F}_k\right) = mg\left(Sin\,\alpha - f \cdot Cos\,\alpha\right) \cdot t$$

$$S_x\left(\overline{N}\right) = 0, \quad \Leftarrow \quad \overline{N} \perp Ox$$

Табылған өрнектерді (a)-ға қойып, мынадай теңдеу аламыз

$$mv_x = mg\left(Sin\,\alpha - f \cdot Cos\,\alpha\right) \cdot t$$

немесе $$\dot{x} = v_x = g\left(Sin\,\alpha - f \cdot Cos\,\alpha\right) \cdot t.$$

Бұл теңдеуді уақыт бойынша интегралдау арқылы:

$$x = g\left(Sin\,\alpha - f \cdot Cos\,\alpha\right) \cdot \frac{t^2}{2} + C_1,$$

интегралдау тұрақтысы C_1 - ді бастапқы шарттардың орындалуынан табамыз:

$$t = 0, \quad x = 0 \Rightarrow C_1 = 0.$$

Сонымен дененің қозғалыс заңы

$$x = g\left(Sin\,\alpha - f \cdot Cos\,\alpha\right) \cdot \frac{t^2}{2}$$

теңдеуімен анықталады. Дененің ℓ=39.2 м жоды жүріп өткен уақыты T-ны табу үшін осы және басқа белгілі мәндерді қозғалыс теңдеуіне қоямыз:

$$39{,}2 = g\left(Sin\,30^0 - f\cdot Cos\,30^0\right)\cdot\frac{T^2}{2}$$

Соңғы теңдеуден керекті уақыт *T*-ны табамыз:

$$T = \sqrt{\frac{2l}{g(\sin\alpha - f\cos\alpha)}} = \sqrt{\frac{78{,}4}{(0{,}5 - 0{,}86\cdot 0{,}2)\cdot 9{,}8}} = 5c.$$

7 тақырып. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема. Механикалық жүйе. Жүйе массасы. (№7 сабақ)

Мақсат: Материялық нүктенің кинетикалық энергиясы, оған әсер етуші күштердің жұмысы және қуат сияқты шамаларды есептей білу, олардың арасындағы тәуелділіктерді анықтайтын теориялық тұжырымдарды есептер шығаруда дұрыс қолдану. Механикалық жүйе, жүйенің массалар центрі және инерция моменттері ұғымдарымен танысу.

7.1 Жұмыс және қуат. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теорема.

Бақылау сұрақтары:

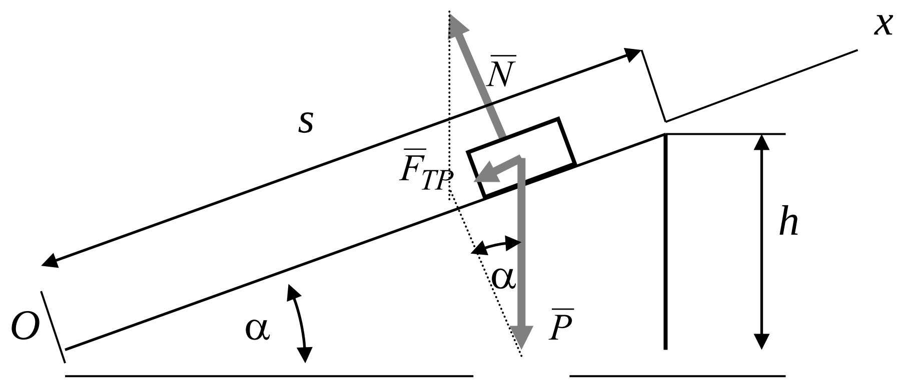
1. Күштің элементар орын ауытыруындағы элементар жұмысы қалай анықталады?
2. Күштің кез келген шектеулі орын ауытыруындағы жұмысы қалай анықталады? Тұрақты күштің жұмысы қалай анықталады?
3. Қуат деген не?
4. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясы деген не?
5. Материялық нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық және интегралдық түрдегі айтылуы?

1 Мысал. Салмағы 2*т* жүкті горизонтпен 30° бұрыш құратын көлбеу жазықтықтың бойымен 5*м* биіктікке көтеру үшін жұмсалатын ең аз жұмысты анықтау қажет. Үйкеліс коэффициенті 0.5-ке тең (22-сурет).

Шешуі: Жүкке түсірілген күштер: оның салмақ күші – $\overline{P}$, үйкеліс күші – $\overline{F}_{уйк}$, көлбеу жазықтықтың нормаль реакция күші $-\ \overline{N}$. Көлбеу жазықтыққа параллель, бас нүктесі қозғалыс басталатын нүкте болатын жоғары бағытта *x* өсін бағыттаймыз.

Жүкті жоғары көтеруге жұмсалатын жұмыс, түсірілген күштердің жұмыстарының қосындысына тең:

$$\sum A_i = A(\overline{P}) + A(\overline{F}_{\%йк}) + A(\overline{N}).$$



22-сурет

Салмақ күшінің жұмысы теріс шамаға тең, себебі жүк жер бетінен жоғары көтеріледі:

$$A(\overline{P}) = -Ph = -mgh.$$

Үйкеліс күшінің жұмысын мынадай формула арқылы анықтаймыз:

$$A(\overline{F}_{уйк}) = -F_{уйк}s = -fNs = -fPs\cos\alpha = -fmgs\cos\alpha.$$

Егер жүк h=5м биіктікке көтерілетін болса $x = s = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, онда:

$$A(\overline{F}_{уйк}) = -fmgh\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -fmghctg\alpha.$$

Орын ауыстыру бағытына перпендикуляр болғандықтан нормаль реакция $\overline{N}$ -нің жұмысы нөлге тең, яғни $A(\overline{N}) = 0$.

Сонымен, жүкке түсірілген күштер жұмыстарының қосындысы:

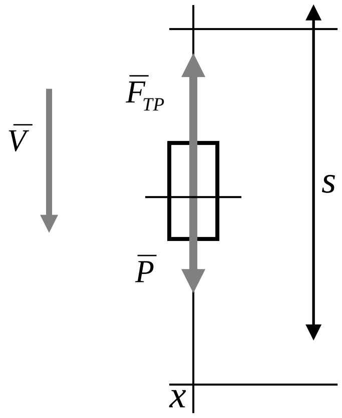
$$\sum A_i = A(\overline{P}) + A(\overline{F}_{TP}) = -mgh - fmghctg\alpha = -mgh(1 + fctg\alpha) =$$
$$= -2000 \cdot 9.81 \cdot 5(1 + 0.5 \cdot 1.732) \approx -183000 \text{ Дж.}$$

Модулін қабылдаймыз A = 183 *кДж*.

2 Мысал. Шахталық лифт v_0 =12 *м/с* жылдамдықпен төмен қарай қозғалады. Лифтінің массасы 6т. Егер лифтіні ұстап тұратын арқан үзілетін болса, онда лифтіні s=10 м жолда тоқтату үшін, сақтандырушы парашют лифті мен шахта қабырғасының арасында қандай шамада үйкеліс күшін тудыруы қажет? Үйкеліс күшін тұрақты деп санаймыз.

Шешуі: Материялық нүктеге түсірілген $\overline{P}$ салмақ күшін және $\overline{F}_{\%йк}$ күшін көрсетеміз (23-сурет). Материялық нүктенің кинети-калық энергиясының өзгеруі туралы теореманы пайдаланамыз:

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = \sum_{ê=1}^{n} A(\overline{F}_k)$$



23-сурет

Материялық нүктеге түсірілген күштердің s орын ауыстыруында жұмысын есептейміз:

$$\sum A(\overline{F}_k) = A(\overline{P}) + A(\overline{F}_{TP}).$$

Материялық нүкте төмен қарай қозғалатын болғандықтан салмақ күшінің жұмысы оң шама болады:

$$A(\overline{P}) = P \cdot s = m \cdot g \cdot s\,.$$

Үйкеліс күшінің жұмысы теріс шамаға тең, себебі үйкеліс күші мен орын ауыстыру бағыттары қарама-қарсы:

$$A(\overline{F}_{TP}) = -F_{TP} \cdot s.$$

Соңғы уақыт мезгілінде лифтінің тоқтайтынын есепке ала отырып $(v_1 = 0)$, кинетикалық энергияның өзгеруі туралы теоремаға қоямыз:

$$-\frac{m{v_0}^2}{2} = mgs - F_{TP} \cdot s.$$

Осыдан:

$$F_{TP} = \frac{mgs + \frac{m{v_0}^2}{2}}{s} = mg + \frac{m{v_0}^2}{2s};$$

$$F_{TP} = mg + \frac{m{v_0}^2}{2s} = 6 \cdot 9.81 + \frac{6 \cdot 12^2}{2 \cdot 10} = 58.8 + 43.2 = 102 \text{ кН.}$$

Ескертулер.

Нүктенің кинетикалық энергиясының өзгеруі туралы теореманың көмегімен мына есептерді оңай шығаруға болады:

а) әсер етуші күштері тұрақты немесе тек қана қашықтыққа тәуелді болатын есептер;

б) берілгендер мен белгісіз шамалардың құрамына әсер етуші күштер, нүктенің орын ауыстыруы, қозғалыстың басындағы және соңындағы жылдамдықтар (F, S, v_0, v_1) кіретін есептер.

Егер әсер етуші күштердің қатарында қозғалыс жылдамдығына тәуелді күш болса, онда динамиканың негізгі есебін қандай да бір жалпы теореманың көмегімен шығаруға болмайды. Бұл жағдайда қозғалыстың дифференциалдық теңдеулерін интегралдау әдісін қолдану керек.

7.2 Механикалық жүйе. Жүйе массасы. Массалар геометриясы: механикалық жүйенің массалар центрі, қатты дененің инерция моменттері.

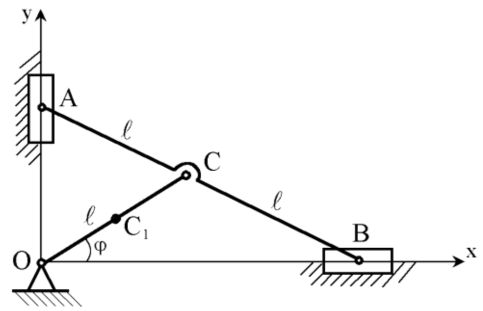
Бақылау сұрақтары:

1. Механикалық жүйе деген не?
2. Жүйенің массалар центрі деген не және оның координаталары қалай анықталады?
3. Параллель өстерге қатысты инерция моменттерінің арасында қандай байланыс бар?
4. Қатты дененің центрден тепкіш инерция моменттері деген не?

Мысал.

Әрқайсысының салмағы $\overline{Q}$ болатын A және B муфталарынан, салмағы $\overline{P}$ болатын OC кривошипінен және салмағы $2\overline{P}$ болатын AB сызғышынан құралған эллипсограф механизмінің массалар центрінің траекториясын анықтау керек. $OC = AC = CB = \ell$ екені белгілі. Сызғыш пен кривошипті біртекті сырықтар, ал муфталарды нүктелік массалар деп санаңыз.

Шешуі:



24-сурет

Декарттық координалар өстерін жүргіземіз (24 сурет). Жүйенің массалар центрі C нүктесінің координаталарын мына формулалар бойынша анықтаймыз:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}.$$

Қарастырып отырған жүйе төрт денеден тұрады: A және B муфталары, OC кривошипі және AB сызғышы. Сондықтан

$$x_c = \frac{Qx_1 + Qx_2 + Px_3 + 2Px_4}{2Q + 3P};$$

$$y_c = \frac{Qy_1 + Qy_2 + Py_3 + 2Py_4}{2Q + 3P}$$

Суретте көрініп тұрғанындай:

$x_1 = 0$ (A нүктесі); $x_2 = 2\ell \cdot Cos\ \varphi$ (B н.); $x_3 = \frac{\ell}{2} Cos\ \varphi$ (C_1 н.);

$x_4 = \ell \cdot Cos\ \varphi$ (C н.);

$y_1 = 2\ell \cdot Sin\ \varphi$; $y_2 = 0$; $y_3 = \frac{\ell}{2} Sin\ \varphi$; $y_4 = \ell \cdot Sin\ \varphi$.

Онда

$$x_c = \frac{2Q\ell \cdot Cos\ \varphi + P\frac{\ell}{2} Cos\ \varphi + 2P\ell \cdot Cos\ \varphi}{2Q + 3P} = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{\ell}{2} Cos\ \varphi$$

$$y_c = \frac{2Q\ell \cdot Sin\ \varphi + P\frac{\ell}{2} Sin\ \varphi + 2P\ell \cdot Sin\ \varphi}{2Q + 3P} = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{\ell}{2} Sin\ \varphi$$

Массалар центрінің траекториясын анықтау үшін соңғы теңдеулерден уақытты қысқарту керек. Ол үшін әр теңдеудің екі жағын да квадраттап, бір-біріне қосамыз. Сонда

$$x_c^2 + y_c^2 = \frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{\ell}{2}$$

Сонымен, массалар центрінің траекториясы центрі O нүктесінде радиусы $\frac{4Q + 5P}{2Q + 3P} \cdot \frac{\ell}{2}$ болатын шеңбер болып шықты.

2 мысал.

Біртекті цилиндр пішінді дененің цилиндрлік өсіне перпендикуляр болатын және оның ауырлық центрінен 10 см қашықтықтан өтетін z өсіне қатысты инерция радиусын есептеңіз. Цилиндрдің радиусы 4 см, ал биіктігі 40 см деп алыңыз.

Шешуі. z өсіне параллель және цилиндрдің ауырлық центрі арқылы өтетін z_c^* өсін жүргіземіз. Цилиндрдің өсіне перпендикуляр болатын және оның ауырлық центрі арқылы өтетін өске қатысты инерция моменті келесі өрнекпен анықталатындығы белгілі:

$$J_{z_c} = M\left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12}\right).$$

Гюйгенс теоремасына сәйкес: $J_z = J_{z_c} + Md^2$, мұндағы $d = 10$ см.

Сан мәндерін қойсақ $J_{z_c} = M\left(\frac{16}{4} + \frac{1600}{12}\right) = 137M$,

Онда $J_z = 137M + M \cdot 100 = 237M$.

Инерция моменті мен инерция радиусы арасындағы байланыс: $J_z = M\rho_u^2$.

Олай болса цилиндрдің *z* өсіне қатысты инерция радиусы:

$$\rho_u = \sqrt{\frac{J_z}{M}} = \sqrt{\frac{237M}{M}} = \sqrt{237} \approx 15{,}4 \text{ см}.$$

Жауабы: $\rho_u = 15{,}4$ см.

Ескерту.

Жекелей алғанда әрқайсысының инерция моменттері белгілі бірнеше денелерден құралған механикалық жүйенің қандай да бір өске қатысты инерция моменті оның құрамындағы барлық денелердің сол өске қатысты инерция моменттерінің қосындысына тең болады.

7 тақырып. Массалар центрінің қозғалысы туралы теорема. Жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема. (№7 сабақ)

Мақсат: Механикалық жүйенің массалар центрінің қозғалысы мен жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теоремаларды есептер шығаруда қолдану.

7.1 Массалар центрінің қозғалысы туралы теорема.

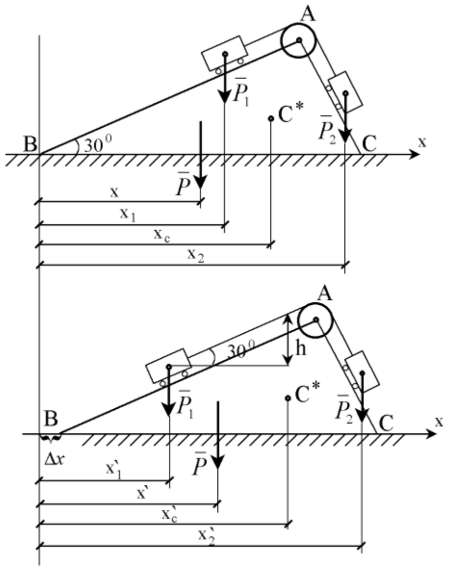
Бақылау сұрақтары:

1. Жүйенің ішкі күштерін қандай қасиеттері бар?
2. Жүйенің массалар центрінің қозғалысы туралы теорема қалай айтылады?
3. Қатты дененің қандай нүктесінің қозғалысын массасы дененің массасына тең материялық нүктенің қозғалысындай қарастыруға болады?
4. Жүйенің массалар центрінің қозғалыс жылдамдығының сақталу заңдары қалай айтылады?

Мысал.

A блогы арқылы өтетін және созылмайтын жіппен жалғанған P_1 және P_2 денелері *BC* табаны көлденең тегіс жазықтықта жатқан тікбұрышты сына тегіс бүйір қабырғаларының бойымен сырғиды. P_1 денесі h = 10 см биіктікке төмен түскендегі сынаның көлденең жазықтық бойымен орын ауыстыруын табу керек. Сынаның салмағы $P = 4P_1 = 16P_2$; жіп пен блоктың массаларын ескермеу керек.

Шешуі:



25-сурет

Призма мен екі жүктен тұратын механикалық жүйеге түсірілген барлық сыртқы күштерді суретте кескіндейміз. Сыртқы күштер: $\overline{P}$ – сынаның салмағы, $\overline{P}_1$, $\overline{P}_2$ – жүктердің салмағы, $\overline{R}$ – көлденең жазықтықтың қорытқы нормаль реакциясы. Көлденең жазықтық идеал тегіс болғандықтан, онымен сына арасында сырғанау үйкеліс күші жоқ. x өсін көлденең оң жаққа бағыттап, жүйенің массалар центрінің қозғалысы туралы теореманың осы өске проекциясы түрінде жазамыз:

$$M\ddot{x}_c = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}^{e}$$

Барлық сыртқы күштер x өсіне перпендикуляр болғандықтан, $\sum F_{kx}^{e} = 0$.

Олай болса, $M\ddot{x}_c = 0, \qquad \Rightarrow M\dot{x}_c = \mathrm{C}_1$.

Бастапқы уақытта жүйе тыныштықта болды, сондықтан

$$C_1 = 0, \quad M\dot{x}_c = 0,$$

Ал соңғы өрнектен алатынымыз

$$Mx_c = \mathrm{C}_2 .$$

Яғни, жүйенің массалар центрінің абсциссасы жүйе құрамындағы жекелеген массалардың орын ауыстыруларына тәуелсіз, тұрақты болып қалады. Жүйенің массалар центрінің анықтамасынан

$$Mx_c = \sum_{\kappa=1}^{n} m_\kappa x_\kappa .$$

$t = 0$ үшін:

$Mx_c = m_1 x_1 + m_2 x_2 + mx$, (25 а сурет)

$t = t\grave{}$ – қозғалыстың соңында:

$Mx_c = m_1 x\grave{}_1 + m_2 x\grave{}_2 + mx\grave{}$.

Екінші теңдеуден біріншісін алып тастасақ:

$$m_1(x`_1 - x_1) + m_2(x`_2 - x_2) + m(x` - x) = 0.$$

немесе

$$m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m\Delta x = 0$$

мұндағы Δx – ізделініп отырған сынаның орын ауыстыруы.

P_1 жүгі h биіктікке орын ауыстырғанда:

$$\Delta x_1^* = \frac{h \cdot Cos\,30^0}{Sin\,30^0} = 17{,}3 \text{ см.}$$

Онда P_2 жүгінің орын ауыстыруы:

$$\Delta x_2^* = 2h \cdot Cos\,60^0 = h = 10 \text{ см.}$$

олай болса,

$$\Delta x_1 = \Delta x_1^* + \Delta x = \Delta x - 17{,}3\ ,$$

$$\Delta x_2 = \Delta x_2^* + \Delta x = \Delta x - 10.$$

Денелердің массаларын салмақтары арқылы өрнектесек:

$$(-17{,}3 + \Delta x)P_1 + (-10 + \Delta x)P_2 + P\Delta x = 0.$$

$P = 4P_1 = 16P_2$ екенін ескерсек

$$\frac{17{,}3}{4} + \frac{10}{16} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + 1\right)\Delta x$$

$$\Delta x = \frac{79}{21} = 3{,}77 \text{ см.}$$

Жауабы: $\Delta x = 3{,}77$ см. (сына оңға қарай жылжыған).

Ескерту:

Есеп шығару барысында механикалық жүйе ретінде нені қарастыру керек екенін білу керек. Ешгер қозғалысы анықталуы керек денеге әсер етуші күштердің ішінде белгісіздері бар болса, онда белгісіз күштер ішкі күштер болып қалатындай механикалық жүйені қарастыру керек. Керісінше, егер қозғалыс беріліп, қандай да бір күшті табу керек болса, онда ол күш сыртқы күш болатындай механикалық жүйе таңдап алыну керек.

7.2 Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теорема.

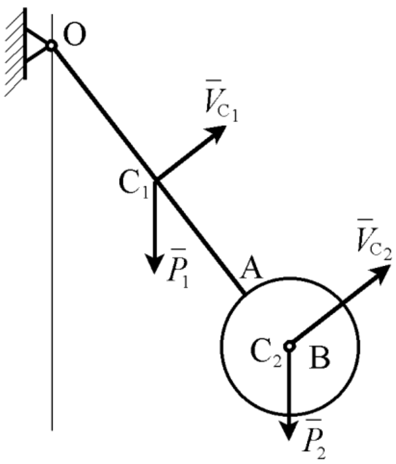
Бақылау сұрақтары:

1. Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшері деген не?
2. Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық және интегралдық түрде айтылуы?
3. Механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерінің сақталу заңы қалай айтылады?
4. Ішкі күштер механикалық жүйенің қозғалыс мөлшерін өзгерте ала ма?

Мысал.

Берілген уақыт мезетінде бұрыштық жылдамдығы ω деп алып, салмағы P_1, ұзындығы $4r$ біртекті OA сырығынан және салмағы P_2, радиусы r болатын B дискісінен тұратын маятниктің қозғалыс мөлшерінің бас векторын анықтау керек.

Шешуі:



26-сурет

Жүйенің қозғалыс мөлшерінің бас векторы $\overline{Q} = \sum m_к \bar{v}_к$.

Жүйе екі денеден құралған: массалар центрі C_1 нүктесінде болатын OA сырығы және массалар центрі C_2 нүктесінде болатын B диск і.

Лай болса, $\overline{Q} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2 = m_1\bar{v}_{C_1} + m_2\bar{v}_{C_2}$ (*)

C_1 нүктесі радиусом $2r$ шеңбер бойымен қозғалады, сондықтан $v_{C_1} = 2\omega r$.

C_2 нүктесі радиусом $5r$ шеңбер бойымен O нүктесін айнала қозғалады, сондықтан: $v_{C_2} = 5\omega r$.

$\bar{v}_{C_1}$ және $\bar{v}_{C_2}$ векторлары OB түзуіне перпендикуляр.

(*) векторлық теңдеуін $\bar{v}_{C_1}$ және $\bar{v}_{C_2}$ векторларының бағытына проекциялаймыз, сонда

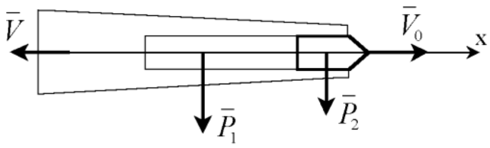
$$Q = \frac{P_1}{g}v_{C_1} + \frac{P_2}{g}v_{C_2} = 2\frac{P_1}{g}\omega r + 5\frac{P_2}{g}\omega r = \frac{\omega r}{g}\left(2P_1 + 5P_2\right).$$

Жауабы: $Q = \dfrac{\omega r}{g}\left(2P_1 + 5P_2\right),$ және OA -ға перпендикуляр.

2 Мысал.

Зеңбірек діңгегінің салмағы 110 кН. Снарядтың салмағы 540 Н. Снарядтың ұшып шығар алдындағы жылдамдығы v_0 = 900 м/с. Зеңбірек діңгегінің еркін шегіну жылдамдығын анықтау керек.

Шешуі:



27-сурет

Жүйе зеңбірек діңгегінен және снарядтан тұрады. Жүйенің барлық сыртқы күштерін кескіндейміз: $\overline{P_1}$ – зеңбірек діңгегінің салмағы, $\overline{P_2}$ –снаряд салмағы. Оқдәрі газдарының қысым күші бұл жүйе үшін ішкі күш болып табылады, сондықтан оны қарастырмаймыз.

x өсін көлденең оң жаққа бағыттаймыз. Жүйенің қозғалыс мөлшерінің бас векторының өзгеруі туралы теореманың дифференциалдық түрінің *Ox* өсіндегі проекциясын жазамыз:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \sum F_{кx}$$

$\sum F_{кx} = 0$ болғандықтан, $Q_x = const.$

Олай болса, жүйенің қозғалыс мөлшерінің бас векторының *Ox* өсіндегі проекциясының тұрақтылығы орын алып отыр.

Бастапқы кезде жүйе тыныштықта болды, яғни. $Q_{x_{t=0}} = 0$, олай болса кез келген уақыт үшін де $Q_x = 0$.

Шектеулі уақыт мезетіндегі зеңбіректің шегініп бара жатқан бөлшектерінің жылдамдығын v деп белгілейік, снарядтың берілген абсолют жылдамдығы $v_0 = 900$ м/с.

Олай болса, $Q_x = \frac{P_1}{g} v_x + \frac{P_2}{g} v_{0x} = 0$.

Бұдан табатынымыз: $v_x = -\frac{P_2 \cdot v_{0x} \cdot g}{P_1 \cdot g} = -\frac{P_2 \cdot v_{0x}}{P_1} = -4{,}42$ м/с.

Минус таңбасы $\bar{v}$ векторының бағыты $\bar{v}_0$ -ге қарама-қарсы екенін білдіреді..

Жауабы: v = 4,4 м/с.

Ескертулер:

1. Жүйенің толық қозғалыс мөлшерін есептеген кезде оның бөлшектерінің абсолют жылдамдықтарын ескеру керек.
2. Бұл теореманы қолданғанда ішкі күштер назарға алынбайды, сондықтан қарастырылатын жүйені, алдын-ала белгісіз барлық күштер ішкі күштердің қатарына қосылатындай етіп, таңдаған жөн.

7тақырып. Механикалық жүйенің кинетикалық моментінің және кинетикалық энергиясының өзгеруілері туралы теоремалар.

(№7 сабақ)

15.1. Механикалық жүйенің кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема. Қатты дененің бекітілген өс төңірегіндегі айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеуі

Мақсат: Механикалық жүйенің кинетикалық моментін есептей білу және оның өзгеруі туралы теореманы айналмалы қозғалыстағы қатты дене динамикасын зерттеуде қолдану.

Бақылау сұрақтары:

1. Механикалық жүйенің кинетикалық моменті деген не
2. Механикалық жүйенің центрге және өске қатысты кинетикалық моментінің өзгеруі туралы теорема қалай айтылады?
3. Жүйенің кинетикалық моментінің сақталу заңы қалай айтылады?
4. Бекітілген өс төңірегінде айналмалы қозғалыс жасайтын қатты дененің кинетикалық моменті қалай анықталады?

Мысал.

Радиусы r және массасы m біртекті шар ілінген серпімді сым темір φ_0 бұрышына бұрып оралады да, сосын оның еркін тарқатылуына мүмкіндік беріледі. Сым темірді бір радианға орауға қажетті момент C-ға тең.

Ауаның кедергісін ескермей және оралған сым темірдің серпімділік күшінің моментін φ бұратылу бұрышына пропорционал деп алып, айналмалы қозғалыс заңдылығын анықтау керек.

Шешуі:

z өсін қатты дененің айналу өсімен бағыттаймыз. Жүйеге шардың салмағы $m\bar{g}$ және моменті $M_{упр} = - C\varphi$ болатын серіппенің серпімділік күші әсер етеді. φ бұрышының санау бағытын сағат тілімен бағыттас деп алайық, егер z өсінің ұшынан қарасақ, онда $M_{упр}$ – сағат тіліне қарсы болады (теріс).

Қатты дененің бекітілген өс төңірегіндегі айналысының дифференциалдық теңдеуін жазамыз:

$$J_z\ddot{\varphi} = \sum m_z\left(F_к^e\right),$$

мұндағы $J_z = \frac{2}{5}mr^2$ - шардың инерция моменті.

Ауырлық күшінің z өсіне қатысты моменті нөлге тең.

Сонда,

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} = -C\varphi \quad \text{или}$$

$$\ddot{\varphi}+\frac{5C}{2mr^2}\varphi=0,\quad \text{т.е. } \ddot{\varphi}+k^2\varphi=0,$$

мұндағы $k=\sqrt{\dfrac{5C}{2mr^2}}$

Бұл біртекті дифференциалдық теңдеу, оның шешімі белгілі:

$$\varphi=C_1\cdot Sin\,kt+C_2\cdot Cos\,kt,$$

$$\dot{\varphi}=C_1\cdot k\cdot Cos\,kt-C_2\cdot k\cdot Sin\,kt.$$

Тұрақтыларды анықтаймыз:

$t=0$ болғанда $\varphi=\varphi_0=0$, $\dot{\varphi}=0$, $C_1=0$, $C_2=\varphi_0$.

Сонымен айналмалы қозғалыс теңдеуі:

$$\varphi=\varphi_0\cdot Cos\sqrt{\frac{5C}{2mr^2}}\cdot t.$$

Жауабы: $\varphi=\varphi_0\cdot Cos\sqrt{\dfrac{5C}{2mr^2}}\cdot t.$

Ескертпе:

Массалар центрінің қозғалысы туралы, материялық нүктелер жүйесінің қозғалыс мөлшерінің өзгеруі туралы теоремалары сияқты, бұл теореманың да айтылуына анықтауы біраз қиындықтар туғызатын жүйенің ішкі күштері кірмейді.